Stochastik I

6. Große Übung

Felix Schamoni Prof. Dr. Leif Döring 12.10.2022

Das Lebesgue-Integral: Einfache Funktionen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{E} \coloneqq \{f : f \text{ einfache Funktion}\}$ bzw.

 $\mathcal{E}^+ := \{f : f \text{ einfache positive Funktion}\}$. Hierbei heißt eine Funktion einfach, falls $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und A_1, \ldots, A_n existieren, sodass die A_k paarweise disjunkt sind mit $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$ und

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Für ein $f \in \mathcal{E}^+$ ist dann das Lebesgue-Integral definiert durch

$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k).$$

Das Lebesgue-Integral: Nichtnegative, messbare Funktionen

Für eine nichtnegative, messbare Funktion $f:(\Omega,\mathcal{A})\to(\bar{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ definieren wir dann das Lebesgue-Integral durch

$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d} \mu \coloneqq \sup \left\{ \int_{\Omega} g \, \mathrm{d} \mu : \text{g einfach, } 0 \le g \le f \right\}.$$

Dieser Ausdruck ist erstmal unhandlich, aber direkt wohldefiniert.

Nach der Vorlesung existiert zu jeder nichtnegativen messbaren numerischen Funktion f eine Folge von einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n\uparrow f$ punktweise und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}f_n\,\mathrm{d}\mu=\int_{\Omega}f\,\mathrm{d}\mu.$$

Diese äquivalente Darstellung ist deutlich praktischer für Beweise.

Das Lebesgue-Integral: Integrierbare Funktionen

Sei $f:(\Omega,\mathcal{A})\to(\bar{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ eine messbare numerische Funktion. Dann sind nach der Vorlesung $f^+\coloneqq\max\{f,0\},f^-\coloneqq-\min\{f,0\}$ messbare und nichtnegative Funktionen. Falls

$$\int_{\Omega} f^{+} d\mu < \infty, \quad \int_{\Omega} f^{-} d\mu < \infty,$$

gilt, heißt f integrierbar und das Lebesgue-Integral für eine integrierbare Funktion f ist definiert durch

$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu \coloneqq \int_{\Omega} f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_{\Omega} f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

Wir schränken uns hierbei auf integrierbare Funktionen ein, um den Fall " $\infty - \infty$ " zu vermeiden.

Eigenschaften des Integrals

Satz (Integraleigenschaften)

Für f, g μ -integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten folgende Eigeschaften

• Linearität: $\alpha f + g$ ist μ -int'bar mit

$$\int (\alpha f + g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \int g d\mu.$$

- *Monotonie*: $f \le g \Rightarrow \int f d\mu \le \int g d\mu$.
- Dreiecksungleichung: $\left| \int f \ d\mu \right| \le \int |f| \ d\mu$.

Für eine messbare Menge A definieren wir

$$\int_A f \, d\mu := \int f \mathbf{1}_A \, d\mu.$$

Gebetsmühle der Integrationstheorie

Um allgemeine Eigenschaften von Integralen zu zeigen (z.B. von vorheriger Folie) gehen wir oft wie folgt vor.

- i) Wir zeigen die Eigenschaft (z.B. Linearität) zuerst für einfache Funktionen anhand der Definition des Integrals für einfache Funktionen. Dies ist meistens der schwerste Schritt.
- ii) Nutze die Approximierbarkeit von positiven, messbaren Funktionen durch einfache Funktionen und MCT für einf. Funktionen, um die Aussage für positive, messbaren Funktionen zu zeigen.
- iii) Zerlege eine integrierbare Funktion in Positiv- und Negativteil und nutze für diese jeweils Schritt (ii). Mit $\int f \ d\mu = \int f^+ \ d\mu \int f^- \ d\mu$ folgt die Aussage dann auch im allgemeinsten Fall.

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und f eine einfache Funktion, das heißt

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega),$$

für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und A_1, \ldots, A_n eine messbare, disjunkte Zerlegung von Ω. Zeige, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\Omega} (\alpha f) \ d\mu = \alpha \int_{\Omega} f \ d\mu.$$

Sei REP. Dann git af = a Î ku 1/4 Lin Ž uzn zaku 1/4 Lin zaku 1/4 Li

Also af EE und

S & f) da = I (kan) m (An) = a I an me seche)

= x Sf du.

Aufgabe 2

Seien f,g zwei nichtnegative, messbare Funktionen mit $g \leq f$. Zeige die Monotonie des Integrals für nichtnegative Funktionen, d.h. zeige

$$\int_{\Omega} g \, \mathrm{d}\mu \le \int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Nutze hierfür direkt die Definition des Integrals für nichtnegative Funktionen:

$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu \coloneqq \sup \left\{ \int_{\Omega} h \, \mathrm{d}\mu : \text{h einfach, } 0 \le h \le f \right\}.$$

Warum lässt sich hier nicht ohne Weiteres Schritt (ii) aus der Gebetsmühle anwenden?

Gette gef Fir are Fulth hest wit hig git ung get and high. => { Show : heet met och 4,3 =: A c & Shop , heft unt ochef? =: B Mon. => Sup SAIS Sup SB3 und sound per Def Sadn & Sfdu.

Integrale und Nullmengen

Definition (Nullmenge)

- i) Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ heißt μ -Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$ gilt.
- ii) Gilt eine Eigenschaft für alle $\omega \in \Omega$ außerhalb einer Nullmenge, so sagt man, dass die Eigenschaft
- μ -fast überall oder μ -fast sicher gilt.

Satz

Sind f, g μ -integrierbare Funktionen, so gelten

- i) f ist μ -fast überall endlich.
- ii) $f = g \mu$ -fast überal $l \Rightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$.
- iii) $f \ge 0$ und $\int f d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ μ -fast überall.

(Abstrakter) Trafosatz

Satz (Trafosatz)

Seien (Ω, \mathcal{A}) , (Ω', \mathcal{A}') messbare Räume, μ ein Maß auf \mathcal{A} , $f: \Omega \to \Omega'$ messbar, $g: \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist g μ_f int'bar genau dann, wenn $g \circ f$ μ -int'bar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\Omega'} g \, d\mu_f = \int_{\Omega} g \circ f \, d\mu.$$

Aufgabe 3

Sei μ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zeige, dass für jedes $\lambda > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\mu((a,\infty)) \leq \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} d\mu(x)}{e^{\lambda a}} \quad \text{bzw.} \quad \mu((a,\infty)) e^{\lambda a} \leq \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} d\mu(x).$$

Folgende Vorüberlegungen sind sehr nützlich:

- Wie lässt sich die linke Seite als Integral über eine einfache Funktion schreiben?
- Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{\lambda a} \le e^{\lambda x}$?