Stochastik I

6. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

12.10.2022

Das Lebesgue-Integral: Einfache Funktionen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{E} \coloneqq \{f : f \text{ einfache Funktion}\}$ bzw. $\mathcal{E}^+ \coloneqq \{f : f \text{ einfache positive Funktion}\}$. Hierbei heißt eine Funktion einfach, falls $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$ und $A_1, \ldots, A_n$ existieren, sodass die A_k paarweise disjunkt sind mit $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$ und

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Für ein $f \in \mathcal{E}^+$ ist dann das Lebesgue-Integral definiert durch

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k).$$

Das Lebesgue-Integral: Nichtnegative, messbare Funktionen

Für eine nichtnegative, messbare Funktion $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ definieren wir dann das Lebesgue-Integral durch

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu : \mathrm{g \text{ einfach}}, 0 \leq g \leq f\right\}.$$

Dieser Ausdruck ist erstmal unhandlich, aber direkt wohldefiniert.
Nach der Vorlesung existiert zu jeder nichtnegativen messbaren numerischen Funktion f eine Folge von einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \uparrow f$ punktweise und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

Diese äquivalente Darstellung ist deutlich praktischer für Beweise.

Das Lebesgue-Integral: Integrierbare Funktionen

Sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ eine messbare numerische Funktion. Dann sind nach der Vorlesung $f^+ := \max\{f, 0\}, f^- := -\min\{f, 0\}$ messbare und nichtnegative Funktionen. Falls

$$\int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu < \infty, \quad \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$

gilt, heißt f integrierbar und das Lebesgue-Integral für eine integrierbare Funktion f ist definiert durch

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

Wir schränken uns hierbei auf integrierbare Funktionen ein, um den Fall “$\infty - \infty$“ zu vermeiden.

Eigenschaften des Integrals

Satz (Integraleigenschaften)

Für f, g μ-integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten folgende Eigeschaften

- ***Linearität:*** *$\alpha f + g$ ist μ-int'bar mit*

$$\int (\alpha f + g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

- ***Monotonie:*** $f \leq g \Rightarrow \int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu.$
- ***Dreiecksungleichung:*** $\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu.$

Für eine messbare Menge A definieren wir

$$\int_A f\, d\mu := \int f \mathbf{1}_A\, d\mu.$$

Gebetsmühle der Integrationstheorie

Um allgemeine Eigenschaften von Integralen zu zeigen (z.B. von vorheriger Folie) gehen wir oft wie folgt vor.

i) Wir zeigen die Eigenschaft (z.B. Linearität) zuerst für einfache Funktionen anhand der Definition des Integrals für einfache Funktionen. Dies ist meistens der schwerste Schritt.

ii) Nutze die Approximierbarkeit von positiven, messbaren Funktionen durch einfache Funktionen und MCT für einf. Funktionen, um die Aussage für positive, messbaren Funktionen zu zeigen.

iii) Zerlege eine integrierbare Funktion in Positiv- und Negativteil und nutze für diese jeweils Schritt (ii). Mit $\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$ folgt die Aussage dann auch im allgemeinsten Fall.

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und f eine einfache Funktion, das heißt

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega),$$

für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und $A_1, \ldots, A_n$ eine messbare, disjunkte Zerlegung von Ω.
Zeige, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_\Omega (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int_\Omega f\, d\mu.$$

Aufgabe 2

Seien f, g zwei nichtnegative, messbare Funktionen mit $g \leq f$. Zeige die Monotonie des Integrals für nichtnegative Funktionen, d.h. zeige

$$\int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Nutze hierfür direkt die Definition des Integrals für nichtnegative Funktionen:

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_\Omega h \, \mathrm{d}\mu : \mathrm{h\ einfach}, 0 \leq h \leq f \right\}.$$

Warum lässt sich hier nicht ohne Weiteres Schritt (ii) aus der Gebetsmühle anwenden?

Integrale und Nullmengen

Definition (Nullmenge)

i) Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ heißt μ-Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$ gilt.

ii) Gilt eine Eigenschaft für alle $\omega \in \Omega$ außerhalb einer Nullmenge, so sagt man, dass die Eigenschaft

iii) μ-fast überall oder μ-fast sicher gilt.

Satz

Sind f, g μ-integrierbare Funktionen, so gelten

i) f *ist μ-fast überall endlich.*

ii) $f = g$ *μ-fast überall* $\Rightarrow \int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

iii) $f \geq 0$ *und* $\int f \, d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ *μ-fast überall.*

(Abstrakter) Trafosatz

Satz (Trafosatz)

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ *messbare Räume,* μ *ein Maß auf* $\mathcal{A}$, $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ *messbar,* $g : \Omega' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *messbar. Dann ist* g μ_f *int'bar genau dann, wenn* $g \circ f$ μ*-int'bar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_{\Omega'} g \, d\mu_f = \int_{\Omega} g \circ f \, d\mu.$$

Aufgabe 3

Sei μ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zeige, dass für jedes $\lambda > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\mu((a,\infty)) \leq \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} \mathrm{d}\mu(x)}{e^{\lambda a}} \quad \text{bzw.} \quad \mu((a,\infty))e^{\lambda a} \leq \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} \mathrm{d}\mu(x).$$

Folgende Vorüberlegungen sind sehr nützlich:

- Wie lässt sich die linke Seite als Integral über eine einfache Funktion schreiben?
- Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{\lambda a} \leq e^{\lambda x}$?