Stochastik I

5. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

05.10.2021

Messbarkeit von Funktionen

Definition

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $f : \Omega \to \Omega'$. Dann heißt f $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$-messbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

für alle $A' \in \mathcal{A}'$ gilt.

- Ist $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}'$, dann ist die Messbarkeit von f äquivalent zu

$$E \in \mathcal{E} \implies f^{-1}(E) \in \mathcal{A}. \quad \text{(Satz 2.1.4.)}$$

- Der obige Satz ist sehr nützlich um die Messbarkeit von Funktionen nachzuweisen.

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und f, g seien $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbare Funktionen. Zeige, dass auch $f \cdot g$ eine $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbare Funktion ist.

Hinweis: Zeige, dass f^2 messbar ist nutze die Identität

$$f \cdot g = \frac{1}{2}(f+g)^2 - \frac{1}{2} f^2 - \frac{1}{2} g^2$$

Nutze den Erzeuger $\mathcal{E} = \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}$.

Sei $t \in \mathbb{R}$

$$\{f^2 \leq t\} = \begin{cases} \emptyset, & t < 0 \\ \{|f| \leq \sqrt{t}\}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \emptyset, & t < 0 \\ (\{f \leq \sqrt{t}\} \cap \{f \geq 0\}) \cup (\{-f \leq \sqrt{t}\} \cap \{f < 0\}), & t \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \{f^2 \leq t\} \in \mathcal{A}$, da $\emptyset \in \mathcal{A}$ und f bzw $-f$ sind messbar

$\overset{2.1.4}{\Rightarrow} f^2$ messbar

$$\Rightarrow f \cdot g = \underbrace{\tfrac{1}{2}(f+g)^2}_{\substack{\text{messbar} \\ \text{siehe ÜB} \\ \text{und oben}}} - \underbrace{\tfrac{1}{2} f^2}_{\text{messbar}} - \underbrace{\tfrac{1}{2} g^2}_{\text{messbar}} \quad \text{ist messbar}$$

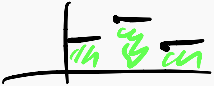
Das Lebesgue-Integral: Einfache Funktionen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{E} := \{f : f \text{ einfache Funktion}\}$ bzw. $\mathcal{E}^+ := \{f : f \text{ einfache positive Funktion}\}$. Hierbei heißt eine Funktion einfach, falls $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$ und $A_1, \ldots, A_n$ existieren, sodass die A_k paarweise disjunkt sind mit $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$ und

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Für ein $f \in \mathcal{E}^+$ ist dann das Lebesgue-Integral definiert durch

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k).$$



Messbarkeit und Approximierbarkeit

- Nach Proposition 3.1.6. existiert für jede nichtnegative messbare Funktion eine Folge von positiven einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \uparrow f$.
- Nach der GÜ bzw. Tutorien ist aber auch der Grenzwert einer monoton wachsenden Folge (in $\overline{\mathbb{R}}$) von positiven einfachen Funktionen messbar, da einfache Funktionen messbar sind.
- Es besteht also eine 1:1 Korrespondenz zwischen messbaren, nichtnegativen und durch wachsende Folgen von positiven, einfachen Funktionen approximierbaren Funktionen.
- Diese Korrespondenz gilt mit der üblichen Zerlegung $f = f^+ - f^-$ dann auch für allgemeine messbare numerische Funktionen und Funktionen, deren Positiv- und Negativteil durch wachsende Folgen von positiven, einfachen Funktionen approximierbar sind.

Das Lebesgue-Integral: Nichtnegative, messbare Funktionen

Für eine nichtnegative, messbare Funktion $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ definieren wir dann das Lebesgue-Integral durch

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu : g \text{ einfach}, 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Dieser Ausdruck ist erstmal unhandlich, aber direkt wohldefiniert.
Nach der Vorlesung existiert zu jeder nichtnegativen messbaren numerischen Funktion f eine Folge von einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \uparrow f$ punktweise und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

Diese äquivalente Darstellung ist deutlich praktischer für Beweise.

Das Lebesgue-Integral: Integrierbare Funktionen

Sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ eine messbare numerische Funktion. Dann sind nach der Vorlesung $f^+ := \max\{f, 0\}, f^- := -\min\{f, 0\}$ messbare und nichtnegative Funktionen. Falls

$$\int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu < \infty, \quad \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$

gilt, heißt f integrierbar und das Lebesgue-Integral für eine integrierbare Funktion f ist definiert durch

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

Wir schränken uns hierbei auf integrierbare Funktionen ein, um den Fall “$\infty - \infty$“ zu vermeiden.

Aufgabe 2

Sei der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gegeben. Wir betrachten nun zwei verschiedene Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Sei also λ das Lebesguemaß und δ_{x_0} das Diracmaß in $x_0 \in \mathbb{R}$. Berechne das Integral von

$$f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x),$$
$$g(x) = \mathbb{1}_{(a,b]}(x) \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b$$

bezüglich der beiden Maße.

Betrachte zuerst das Lebesguemaß λ

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda$$

$$\overset{\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \in \mathcal{E}^+}{=} 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q}) = 1 \cdot \lambda\Big(\biguplus_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}\Big) \overset{\sigma\text{-add.}}{=} \sum_{q \in \mathbb{Q}} 0 = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]} \, d\lambda \overset{g \in \mathcal{E}^+}{=} \lambda([a,b]) = b-a$$

Betrachte nun δ_{x_0} für $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_{x_0} = \delta_{x_0}(\mathbb{Q}) = \begin{cases} 1, & x_0 \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\delta_{x_0} = \delta_{x_0}([a,b]) = \begin{cases} 1, & x_0 \in [a,b] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3

Sei wieder der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gegeben, versehen mit dem Maß

$$\mu := \delta_2 + \delta_3 + \delta_5.$$

$\mu(A) = \delta_2(A) + \delta_3(A) + \delta_5(A)$

Berechne das Integral bezüglich μ für die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned}
f(x) &:= \mathbb{1}_{(2,3]}(x) + \mathbb{1}_{[5,\infty)}(x), \\
g(x) &:= \mathbb{1}_{\{2\}}(x) + \mathbb{1}_{\{3\}}(x) + \mathbb{1}_{\{5\}}(x), \\
h(x) &:= \mathbb{1}_{(-\infty,2)}(x) + \mathbb{1}_{(3,5)}(x) + \mathbb{1}_{(5,\infty)}(x).
\end{aligned}$$

Für die Schnellen: Vergleiche die Integrale mit den entsprechenden Integralen bezüglich des Lebesguemaßes λ. Was fällt auf? Lassen sich eure Überlegungen auch auf die erste Aufgabe übertragen?

$$f(x) = \mathbb{1}_{(2,3]}(x) + \mathbb{1}_{[5,\infty)}(x) \quad , \mu := \delta_2 + \delta_3 + \delta_5$$

$$\int f \, d\mu \overset{f \in \mathcal{E}^+}{=} 1 \cdot \mu((2,3]) + 1 \cdot \mu([5,\infty))$$

$$\overset{\text{Def. } \mu}{=} \delta_2((2,3]) + \delta_3((2,3]) + \delta_5((2,3])$$

$$+ \delta_2([5,\infty)) + \delta_3([5,\infty)) + \delta_5([5,\infty))$$

$$= 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 2$$

$$g(x) = \mathbb{1}_{\{2\}}(x) + \mathbb{1}_{\{3\}}(x) + \mathbb{1}_{\{5\}}(x)$$

$$\int g \, d\mu = \mu(\{2\}) + \mu(\{3\}) + \mu(\{5\}) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$h(x) = 1\!\!1_{(-\infty,2)}(x) + 1\!\!1_{[3,5)}(x) + 1\!\!1_{[5,\infty)}(x)$$

$$\int h \, d\mu = \mu((-\infty,2)) + \mu([3,5)) + \mu([5,\infty))$$

$$= \sigma$$

$\hookrightarrow$ Wert des Integrals $\int f \, d\mu$ hängt sehr stark von dem unterliegenden Maß μ ab.

Aufgabe 4

Seien der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und das Diracmaß δ_{x_0} für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeige, dass für eine einfache Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ folgendes erfüllt ist:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\delta_{x_0} = f(x_0)$$ [redacted] $\mathbb{R}$.

Sei $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$, $A_k \in \mathcal{A}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$ eine einfache Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$.

OE seien die A_k disjunkt mit $\dot\bigcup A_k = \Omega = \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_{x_0} \overset{f \in \mathcal{E}^+}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \delta_{x_0}(A_k)$$

Da $\dot\bigcup A_k = \mathbb{R}$, existiert genau ein A_{k_0} mit $x_0 \in A_{k_0}$. Für x_0 gilt dann $f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x_0)$

$= \alpha_{k_0}$.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_{x_0} = \alpha_{x_0} = f(x_0)$$

Anmerkung: Durch Approximation mit einfachen Funktionen und Grenzwertbildung folgt die analoge Aussage für pos., messbare Fkt. & durch Aufteilen in Positiv- und Negativteil für allg. integrierbare Funktionen.