Stochastik I

4. Große Übung

Prof. Dr. Leif Döring

27.09.2023

Verteilungsfunktionen von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Definition

Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann heißt die Funktion

$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \quad x \mapsto \mathbb{P}((-\infty, x])$$

Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$.

- Es gilt:

  $$\mathbb{P}((a,b]) = F(b) - F(a)$$

  für $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Verteilungsfunktionen und W-Maße

Sei $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ ein W-Raum. Wir können die Verteilung des Wahrscheinlichkeitsmaßes nun durch zwei verschiedene Objekte beschreiben. Zum einen der abstrakte Begriff des Maßes, d.h. eine Abbildung

$$\mathbb{P} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, 1], \quad A \mapsto \mathbb{P}(A).$$

Maße können wir für beliebige σ-Algebren definieren, die Definition ist sehr allgemein. Für den Fall $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ können wir auch Verteilungsfunktionen betrachten, d.h. Abbildungen $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$. Diese sind sehr viel anschaulicher und es gibt eine 1-zu-1 Beziehung von W-Maßen auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und Verteilungsfunktionen. (Stichwort: Carathéodory)
Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$:

$$\mathbb{P}((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Aufgabe 1

Wir zeigen zusammen, dass für eine absolutstetige Verteilungsfunktion F mit Dichte f tatsächlich gilt

$$\mathbb{P}_F(A) = \int_A f(x)\, dx$$

für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Hinweis: Wir nehmen an, dass es sich bei der rechten Seite um ein Maß handelt. Das kommt später.

Aufgabe 2

Rechnen:

- Zeige, dass $f(x) = \lambda(1 - e^{-\lambda x})\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, eine Dichtefunktion ist. Berechne die zugehörige Verteilungsfunktion. Was ist der Effekt von λ?
- Zeige, dass $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, eine Dichtefunktion ist. Berechne die zugehörige Verteilungsfunktion. Wo kommt das π her?

Wie sehen die Dichten und Verteilungsfunktionen aus? Wie ist die Maße der zugehörigen Maße verteilt?

Aufgabe 3

Modellierung:

- Mit welchem Wahrscheinlichkeitsmaß könnte man die Länge der Schlange an der Mensa beschreiben? Was für Vor- und Nachteile hat euer Modell?
- Mit welchem Wahrscheinlichkeitsmaß könnte man die Zeit modellieren, die die Wartezeit am Aufzug in B6 beträgt? Was für Vor- und Nachteile hat euer Modell?

Messbarkeit von Funktionen

Definition

Seien $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $f : \Omega \to \Omega'$. Dann heißt f $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$-messbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

für alle $A' \in \mathcal{A}'$ gilt.

- Satz 2.1.4: Ist $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}'$, dann ist die Messbarkeit von f äquivalent zu

$$E \in \mathcal{E} \implies f^{-1}(E) \in \mathcal{A}.$$

- Der obige Satz ist sehr nützlich um die Messbarkeit von Funktionen nachzuweisen.

Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Zusammen haben wir schon gezeigt, dass zum Beispiel die folgenden Mengensysteme Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &:= \{(-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_2 &:= \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_3 &:= \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},\\
\mathcal{E}_4 &:= \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},\\
\mathcal{E}_5 &:= \{(t, \infty) : t \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_6 &:= \{[t, \infty) : t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

Mit Satz 2.1.4. müssen wir um die Messbarkeit einer $\mathbb{R}$-wertigen Funktion nachzuweisen, also nur die Urbilder der Mengen in einem dieser Mengensysteme betrachten.

Messbarkeit reellwertiger Funktionen

Wenn $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion von einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist, reicht es also zum Beispiel aus zu zeigen, dass die Menge

$$\{f < t\} \coloneqq \{\omega \in \Omega : f(\omega) < t\} = f^{-1}((-\infty, t))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ in $\mathcal{A}$ enthalten ist, um folgern zu können, dass f $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})-$messbar ist.

Aufgabe 4

Zeige, dass die Shift-Abbildung

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto x + a$$

Borel-messbar ist.

Messbarkeit numerischer Funktionen

Für numerische Funktionen (also $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) funktioniert das analog, da nach der Vorlesung

$$\mathcal{E}_5 := \{[-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{E}_6 := \{[-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

Erzeuger von $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \{B \subseteq \bar{\mathbb{R}} : B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ sind.

Aufgabe 5

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $(f_n, n \in \mathbb{N})$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen mit $f_n \colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die für $\omega \in \Omega$ punktweise definierte Funktion

$$g(\omega) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega)$$

messbar ist.