

Stochastik I

4. Große Übung

Felix Schamoni

Prof. Dr. Leif Döring

28.09.2022

Definition

Eine Funktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto F(x),$$

welche die Eigenschaften

- i) $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- ii) F ist monoton steigend,
- iii) F ist rechtsseitig stetig,
- iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$,

erfüllt, heißt **Verteilungsfunktion**.

- Auf dem Übungsblatt habt Ihr gezeigt, dass jede Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes diese vier Eigenschaften erfüllt.

Aufgabe 1

Sei

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto f(x),$$

eine stetige (stetig ist i.A. nicht nötig) und integrierbare Funktion, die die Eigenschaften

i) $f \geq 0$,

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1$,

erfüllt. Zeige, dass

$$F(t) := \int_{-\infty}^t f(x) \, dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

eine Verteilungsfunktion ist.

Definition

Sei \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann heißt die Funktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \mathbb{P}((-\infty, x])$$

Verteilungsfunktion von \mathbb{P} .

- Es gilt:

$$\mathbb{P}((a, b]) = F(b) - F(a)$$

für $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Verteilungsfunktionen und W-Maße

Sei $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ ein W-Raum. Wir können die Verteilung des Wahrscheinlichkeitsmaßes nun durch zwei verschiedene Objekte beschreiben. Zum einen der abstrakte Begriff des Maßes, d.h. eine Abbildung

$$\mathbb{P} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1], \quad A \mapsto \mathbb{P}(A).$$

Maße können wir für beliebige σ -Algebren definieren, die Definition ist sehr allgemein. Für den Fall $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ können wir auch Verteilungsfunktionen betrachten, d.h. Abbildungen $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Diese sind sehr viel anschaulicher und es gibt eine 1-zu-1 Beziehung von W-Maßen auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und Verteilungsfunktionen. (Stichwort: Carathéodory)
Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$:

$$\mathbb{P}((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Falls eine Verteilungsfunktion absolut stetig oder diskret ist, können wir noch ein weiteres Objekt betrachten, nämlich Dichtefunktionen (siehe Aufgabe 1).

Für den **absolut stetigen Fall** haben wir dies schon in Aufgabe 1 gesehen, da für eine Dichtefunktion f durch

$$F(t) := \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

eine Verteilungsfunktion definiert wird. Die Verteilung der Masse des zugehörigen W -Maßes wird durch die Dichte nochmal deutlicher charakterisiert, siehe nächste Folie.

Es gilt nämlich

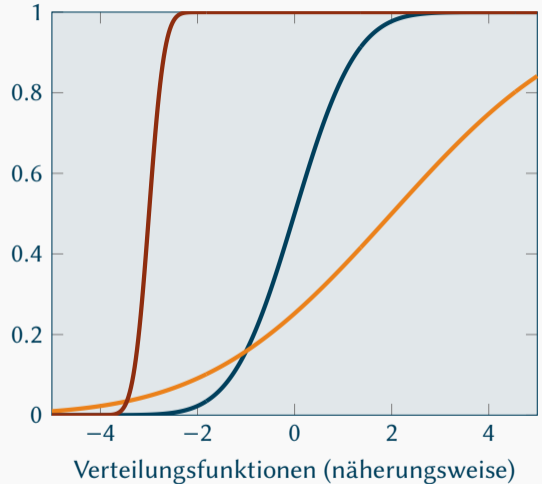
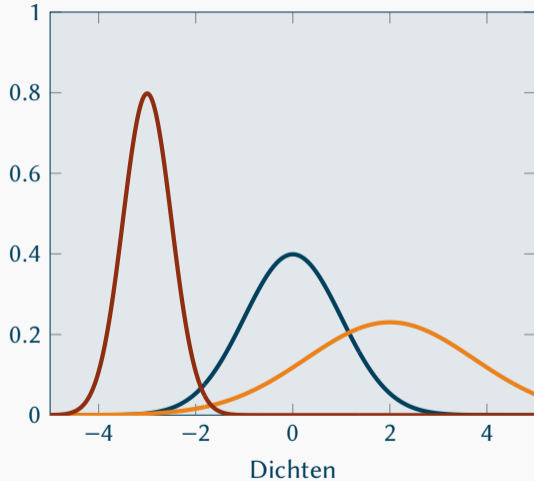
$$\mathbb{P}_F(A) = \int_A f(x) dx.$$

Die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ ist definiert als das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Welchen Einfluss haben die beiden Parameter μ und σ ?

Die Normalverteilung ($\mu = -3, \sigma^2 = \frac{1}{4}$ Rot, $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ Blau, $\mu = 2, \sigma^2 = 3$ Orange)



Ist F **diskret** mit Werten a_1, \dots, a_N und Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_N , so gilt

$$F(t) = \sum_{k=1}^N p_k \mathbf{1}_{[a_k, \infty)}, \quad \text{und} \quad \mathbb{P}_F(A) = \sum_{a_k \in A} p_k.$$

\mathbb{P} hat also viel Masse im Punkt a_k , falls die zugehörige Wahrscheinlichkeit p_k groß ist.

Aufgabe 2

Zeige, dass für eine absolutstetige Verteilungsfunktion F mit Dichte f tatsächlich gilt

$$\mathbb{P}_F(A) = \int_A f(x) dx$$

für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Hinweis: Ihr dürft annehmen, dass es sich bei der rechten Seite um ein Maß handelt.

Definition

Seien (Ω, \mathcal{A}) , (Ω', \mathcal{A}') messbare Räume und $f: \Omega \rightarrow \Omega'$. Dann heißt f $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$ -messbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

für alle $A' \in \mathcal{A}'$ gilt.

- Ist \mathcal{E} ein Erzeuger von \mathcal{A}' , dann ist die Messbarkeit von f äquivalent zu

$$E \in \mathcal{E} \implies f^{-1}(E) \in \mathcal{A}. \quad (\text{Satz 2.1.4.})$$

- Der obige Satz ist sehr nützlich um die Messbarkeit von Funktionen nachzuweisen.

Zusammen haben wir schon gezeigt, dass zum Beispiel die folgenden Mengensysteme **Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$** sind:

$$\mathcal{E}_1 := \{(-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{E}_2 := \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{E}_3 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$$

$$\mathcal{E}_4 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$$

$$\mathcal{E}_5 := \{(t, \infty) : t \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{E}_6 := \{[t, \infty) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Mit Satz 2.1.4. müssen wir um die Messbarkeit einer \mathbb{R} -wertigen Funktion nachzuweisen, also nur die Urbilder der Mengen in einem dieser Mengensysteme betrachten.

Wenn $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion von einem messbaren Raum (Ω, \mathcal{A}) nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist, reicht es also zum Beispiel aus zu zeigen, dass die Menge

$$\{f < t\} := \{\omega \in \Omega : f(\omega) < t\} = f^{-1}((-\infty, t))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ in \mathcal{A} enthalten ist, um folgern zu können, dass f $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist.

Für numerische Funktionen (also $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) funktioniert das analog, da nach der Vorlesung

$$\mathcal{E}_5 := \{[-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{E}_6 := \{[-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

Erzeuger von $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \{B \subseteq \bar{\mathbb{R}} : B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ sind.

Aufgabe 13

Sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum und $(f_n, n \in \mathbb{N})$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen mit $f_n: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ Zeige, dass die Shift-Abbildung

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + a$$

messbar ist.

b) Zeige, dass die für $\omega \in \Omega$ punktweise definierte Funktion

$$g(\omega) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega)$$

messbar ist.

