Stochastik I

3. Große Übung

Prof. Dr. Leif Döring

20.09.2023

Carathéodory

Fortsetzungssatz von Carathéodory + Existenz und Eindeutigkeit einfügen.

Allgemeine Verteilungsfunktionen

Definition

Eine Funktion

$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \quad x \longmapsto F(x),$$

welche die Eigenschaften

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

ii) F ist monoton steigend,

iii) F ist rechtsseitig stetig,

iv) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$,

erfüllt heißt Verteilungsfunktion.

- Jede Verteilungsfunktion korrespondiert mit genau einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. (Carathéodory+Vorlesung)

Definition

Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann heißt die Funktion

$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \quad x \mapsto \mathbb{P}((-\infty, x])$$

Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$.

- Es gil:

$$\mathbb{P}((a,b]) = F(b) - F(a)$$

für $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Verteilungsfunktionen und W-Maße

Sei $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ ein W-Raum. Wir können die Verteilung des Wahrscheinlichkeitsmaßes nun durch zwei verschiedene Objekte beschreiben. Zum einen der abstrakte Begriff des Maßes, d.h. eine Abbildung

$$\mathbb{P} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1], \quad A \mapsto \mathbb{P}(A).$$

Maße können wir für beliebige σ-Algebren definieren, die Definition ist sehr allgemein. Für den Fall $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ können wir auch Verteilungsfunktionen betrachten, d.h. Abbildungen $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$. Diese sind sehr viel anschaulicher und es gibt eine 1-zu-1 Beziehung von W-Maßen auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und Verteilungsfunktionen. (Stichwort: Carathéodory)
Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$:

$$\mathbb{P}((a,b]) = F(b) - F(a).$$

Verteilungsfunktionen und Dichten

Falls eine Verteilungsfunktion absolut stetig oder diskret ist, können wir noch ein weiteres Objekt betrachten, nämlich Dichtefunktionen (siehe Aufgabe 1).
Für den **absolut stetigen Fall** haben wir dies schon in Aufgabe 1 gesehen, da für eine Dichtefunktion f durch

$$F(t) := \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx$$

eine Verteilungsfunktion definiert wird. Die Verteilung der Masse des zugehörigen W-Maßes wird durch die Dichte nochmal deutlicher charakterisiert. Es gilt nämlich

$$\mathbb{P}_F(A) = \int_A f(x)\, dx.$$

Aufgabe 2

Sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto f(x),$$

eine stetige (stetig ist i.A. nicht nötig) und integrierbare Funktion, die die Eigenschaften

i) $f \geq 0$,

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$,

erfüllt. Zeige, dass

$$F(t) := \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad t \in \mathbb{R},$$

eine Verteilungsfunktion ist.

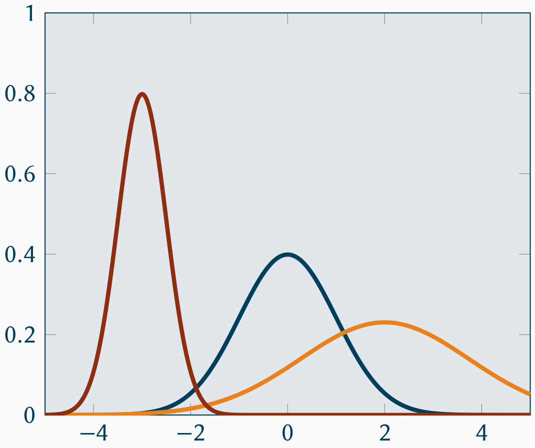
Die Normalverteilung

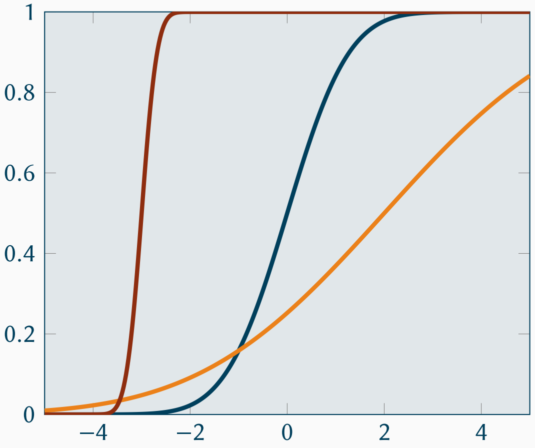
Die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ ist definiert als das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktion

$$F\colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad t \mapsto \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x.$$

Welchen Einfluss haben die beiden Parameter μ und σ?

Die Normalverteilung ($\mu = -3$, $\sigma^2 = \frac{1}{4}$ Rot, $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ Blau, $\mu = 2$, $\sigma^2 = 3$ Orange)



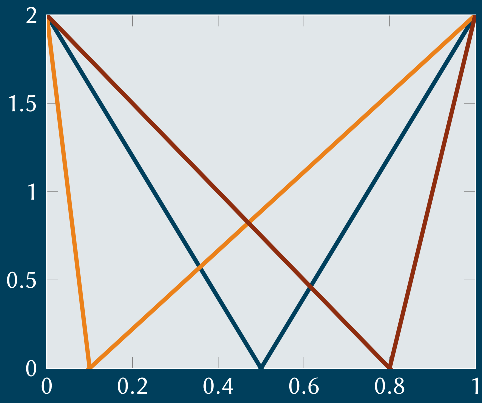


Aufgabe 1

Sei für $c \in (0,1)$ die Dichtefunktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,$$
$$x \mapsto 2\left(1 - \frac{1}{c}x\right)\mathbb{1}_{(0,c]}(x) + 2\left(\frac{1}{1-c}x - \frac{c}{1-c}\right)\mathbb{1}_{(c,1]}(x)$$

gegeben.
Berechne die Verteilungsfunktion von f für $c = \frac{1}{2}$.



$c = 0.1$ Orange, $c = 0.5$ Blau, $c = 0.8$ Rot

Dichten vs. Verteilungsfunktionen ($c = 0.1$ Orange, $c = 0.5$ Blau, $c = 0.8$ Rot)