

# Stochastik I

## 3. Große Übung

---

Felix Schamoni

Prof. Dr. Leif Döring

21.09.2022

# Erinnerung: Allgemeine Verteilungsfunktionen

## Definition

Eine Funktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto F(x),$$

welche die Eigenschaften

- i)  $0 \leq F(x) \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,
- ii)  $F$  ist monoton steigend,
- iii)  $F$  ist rechtsseitig stetig,
- iv)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ,

erfüllt heißt **Verteilungsfunktion**.

- Jede Verteilungsfunktion korrespondiert mit genau einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . (Carathéodory+Vorlesung)

## Definition

Sei  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Dann heißt die Funktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \mathbb{P}((-\infty, x])$$

Verteilungsfunktion von  $\mathbb{P}$ .

- Es gilt:

$$\mathbb{P}((a, b]) = F(b) - F(a)$$

für  $a \leq b \in \mathbb{R}$ .

# Die Normalverteilung

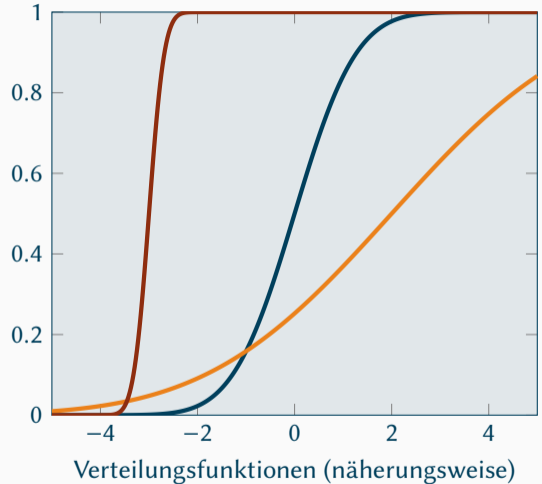
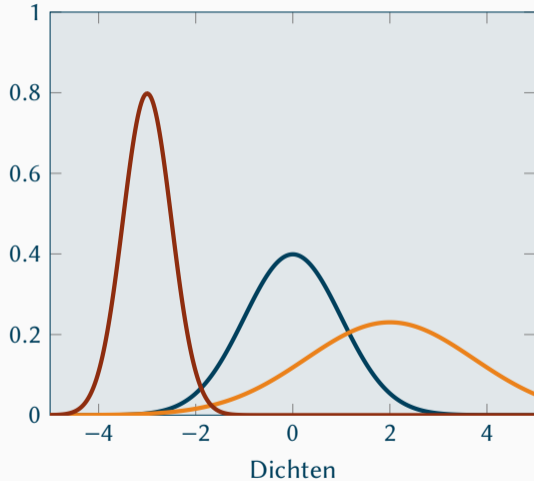
Die Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  mit  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  ist definiert als das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mit Verteilungsfunktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Welchen Einfluss haben die beiden Parameter  $\mu$  und  $\sigma$ ?

- Die Normierungseigenschaft für Wahrscheinlichkeitsmaße wurde in der letzten Übung für  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 = 1$  gezeigt, der allgemeine Fall folgt per Substitution.

# Die Normalverteilung ( $\mu = -3, \sigma^2 = \frac{1}{4}$ Rot, $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ Blau, $\mu = 2, \sigma^2 = 3$ Orange)



# Aufgabe 1

Sei für  $c \in (0, 1)$  die Dichtefunktion

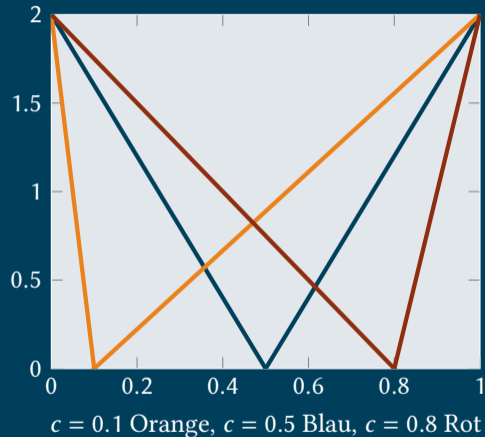
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

$$x \mapsto 2 \left(1 - \frac{1}{c}x\right) \mathbb{1}_{(0,c]}(x) + 2 \left(\frac{1}{1-c}x - \frac{c}{1-c}\right) \mathbb{1}_{(c,1]}(x)$$

gegeben.

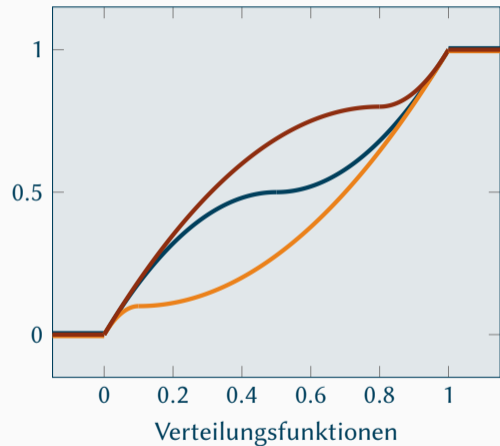
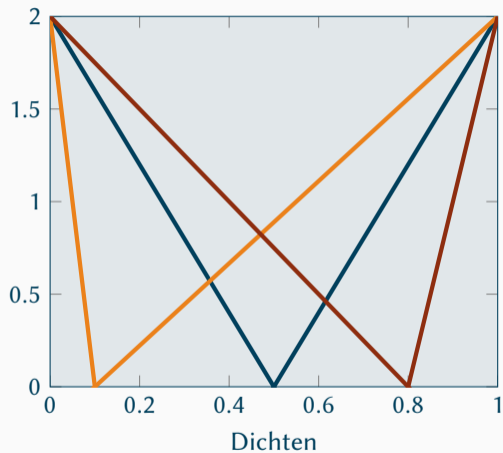
Berechne die Verteilungsfunktion von  $f$  für

$$c = \frac{1}{2}.$$





## Dichten vs. Verteilungsfunktionen ( $c = 0.1$ Orange, $c = 0.5$ Blau, $c = 0.8$ Rot)





## Erinnerung: Messbarkeit von Funktionen

### Definition

Seien  $(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $(\Omega', \mathcal{A}')$  messbare Räume und  $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ . Dann heißt  $f$   $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$ -messbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

für alle  $A' \in \mathcal{A}'$  gilt.

- Ist  $\mathcal{E}$  ein Erzeuger von  $\mathcal{A}'$ , dann ist die Messbarkeit von  $f$  äquivalent zu

$$E \in \mathcal{E} \implies f^{-1}(E) \in \mathcal{A}. \quad (\text{Satz 2.1.4.})$$

- Der obige Satz ist sehr nützlich um die Messbarkeit von Funktionen nachzuweisen.

## Erinnerung: Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Zusammen haben wir schon gezeigt, dass zum Beispiel die folgenden Mengensysteme **Erzeuger von  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$**  sind:

$$\mathcal{E}_1 := \{(-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{E}_2 := \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{E}_3 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$$

$$\mathcal{E}_4 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$$

$$\mathcal{E}_5 := \{(t, \infty) : t \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{E}_6 := \{[t, \infty) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Mit Satz 2.1.4. müssen wir um die Messbarkeit einer  $\mathbb{R}$ -wertigen Funktion nachzuweisen, also nur die Urbilder der Mengen in einem dieser Mengensysteme betrachten.

Wenn  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion von einem messbaren Raum  $(\Omega, \mathcal{A})$  nach  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  ist, reicht es also zum Beispiel aus zu zeigen, dass die Menge

$$\{f < t\} := \{\omega \in \Omega : f(\omega) < t\} = f^{-1}((-\infty, t))$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  in  $\mathcal{A}$  enthalten ist, um folgern zu können, dass  $f$   $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist.

Für numerische Funktionen (also  $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ) funktioniert das analog, da nach der Vorlesung

$$\mathcal{E}_5 := \{[-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{E}_6 := \{[-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

Erzeuger von  $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \{B \subseteq \bar{\mathbb{R}} : B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$  sind.

## Aufgabe 2

Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $(f_n, n \in \mathbb{N})$  eine Folge messbarer numerischer Funktionen mit  $f_n: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Zeige, dass die für  $\omega \in \Omega$  punktweise definierte Funktionen

$$g(\omega) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega)$$

messbar ist.

