Stochastik I

2. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

14.09.22

Maß

Definition

Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt $\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ ein **Maß auf $\mathcal{A}$**, falls folgende Eigenschaften gelten:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkte Mengen, so gilt $\mu(\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Wir nennen diese Eigenschaft σ-Additivität.

Ein Maß μ heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$. μ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls $\mu(\Omega) = 1$.

Aufgabe 1

a) Sei μ ein endliches (und nicht triviales) Maß auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeige, dass für ein $c \in \mathbb{R}$ auch $\widetilde{\mu} := c \cdot \mu$ ein endliches Maß ist. Wie muss c gewählt werden, damit $\widetilde{\mu}$ ein W-Maß ist?

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Betrachte das Maß

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty), \quad A \mapsto \sum_{k=1}^{n} \delta_k(A)\, k$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Wie muss c hier gewählt werden, damit das Maß $\widetilde{\mu} := c \cdot \mu$ ein W-Maß ist?

Die Borelsche σ-Algebra

Definition (Erzeugte σ-Algebra)

Für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}, \mathcal{B}\ \sigma-\mathrm{Alg.}} \mathcal{B}$$

die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra. $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. Falls $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$, so nennen wir $\mathcal{E}$ Erzeuger von $\mathcal{A}$.

Definition (Borelsche σ-Algebra)

Sei die Grundmenge $\Omega = \mathbb{R}$ gegeben und $\mathcal{O}$ die Menge aller offenen Teilmengen von Ω. Dann heißt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{O})$$

die Borelsche σ-Algebra der reellen Zahlen.

- Die Borelsche σ-Algebra ist also die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthält.
- Die Borelsche σ-Algebra hat aber noch viele weitere Erzeuger.

Wie zeigt man Gleichheit von erzeugten σ-Algebren?

Seien 2 Mengensystem $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ gegeben. Wir wollen $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$ zeigen. Dazu nutzen wir folgende Eigenschaften:

- Für Mengensysteme $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ gilt $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$,
- $\sigma(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$.

Beide Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition der erzeugten σ-Algebra. Nun zeigen wir

- $\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$ und
- $\mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Somit folgt aus den oberen Eigenschaften $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{E}_2)) = \sigma(\mathcal{E}_2)$ und analog auch $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Aufgabe 2

Zeige, dass die folgenden Mengensysteme Erzeuger der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind:

$$\mathcal{E}_1 := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ abgeschlossen}\},$$
$$\mathcal{E}_2 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}.$$

Ihr dürft verwenden, dass $\mathcal{E} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugt.

Dynkin-Systeme vs. σ-Algebren

Definition (Dynkin-System)

Sei Ω eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{D}$ heißt Dynkin-System (über Ω), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$,

(ii) $A \in \mathcal{D} \implies A^C \in \mathcal{D}$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt $\implies \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

Definition (σ-Algebra)

Sei Ω eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ heißt σ-Algebra (über Ω), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^C \in \mathcal{A}$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl und

$$\mathcal{D} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \#(A \cap \{1, \dots, n\}) \text{ gerade oder } 0\}.$$

a) Zeige, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System (über $\mathbb{N}$) ist.

b) Ist $\mathcal{D}$ auch eine σ-Algebra (über $\mathbb{N}$)?