Stochastik I

1. Große Übung

Prof. Dr. Leif Döring

06.09.23

Agenda

Diese Übung soll als Vorbereitung der Vorlesung gelten und wichtige Grundlage aus Analysis 1 wiederholen. Sie orientiert sich an dem Wiederholungsskript von der Website. Dort könnt ihr alle Inhalte der Übung inklusive weiterer Ausführungen nachlesen. Nutzt die Gelegenheit auch, um bei den Aufgaben saubere Beweisführung zu üben. Wir beschäftigen uns heute mit

1. Mengen
2. σ-Algebren und Maßen

Mengen

Definition (Ein paar Definitionen)

Seien Ω und A Mengen. Wir sagen A ist Teilmenge von Ω (oder kurz: $A \subseteq \Omega$), falls für alle $x \in A$ auch $x \in \Omega$ gilt. Die Menge aller Teilmengen von Ω bezeichnen wir als **Potenzmenge** von Ω und schreiben $\mathcal{P}(M) := \{A : A \subseteq M\}$. Die Potenzmenge ist also eine Menge von Mengen. Für zwei Teilmengen A_1, A_2 einer Grundmenge Ω definieren wir folgende Operationen:

- **Durchschnitt** $A_1 \cap A_2 := \{x \in \Omega : x \in A_1 \wedge x \in A_2\}$.
- **Vereinigung** $A_1 \cup A_2 := \{x \in \Omega : x \in A_1 \vee x \in A_2\}$.
- **Differenz** $A_1 \setminus A_2 := \{x \in \Omega : x \in A_1 \wedge x \notin A_2\}$.
- **Symmetrische Differenz** $A_1 \triangle A_2 := (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$.

Falls $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, so sagen wir, dass A_1 und A_2 **disjunkt** sind.

Diese Definitionen lassen sich auch auf beliebige Indexmengen erweitern:

Definition

Sei $(A_n)_{n\in I}$ eine Familie von Teilmengen von Ω mit nichtleerer Indexmenge I. Wir definieren

- $\bigcup_{n\in I} A_n := \{x \in \Omega : \text{Es existiert } n \in I, \text{ sodass } x \in A_n\}$.
- $\bigcap_{n\in I} A_n := \{x \in \Omega : x \in A_n \text{ für alle } n \in I\}$.

Aufgabe 1

a) Skizziere die 4 Mengenoperationen für 2 Mengen.

b) Sei $\Omega = \{a, b, 1\}$. Gebe $\mathcal{P}(\Omega)$ an.

c) Beweise die De Morgan'schen Rechenregeln:

$$\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right)^C = \bigcap_{n\in I} A_n^C \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{n\in I} A_n\right)^C = \bigcup_{n\in I} A_n^C.$$

Versuche dabei, jeden Rechenschritt so genau wie möglich zu begründen.

Aufgabe 2

Zeige folgende Eigenschaften und Rechenregeln:

- $f^{-1}(Y) = X$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
- Sei $A \subseteq Y$, dann gilt $f^{-1}(A^C) = \left(f^{-1}(A)\right)^C$.
- Sei $(A_n)_{n\in I}$ eine Familie von Teilmengen von Y mit nichtleerer Indexmenge I, dann gilt

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right) = \bigcup_{n\in I} f^{-1}(A_n).$$

Indikatorfunktion

Sei $A \subseteq X$, dann nennen wir die Abbildung

$$\mathbf{1}_A : \; X \longrightarrow \{0, 1\}, \quad x \mapsto \mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

die **Indikatorfunktion** der Menge A. Für Indikatorfunktionen gelten folgende Rechenregeln:

i) $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(x)$,

ii) $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$,

iii) $\mathbf{1}_{A\setminus B}(x) = \mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$,

iv) $\mathbf{1}_{A^C}(x) = \mathbf{1}_X(x) - \mathbf{1}_A(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$,

v) $\mathbf{1}_{A\triangle B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - 2 \cdot \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$.

Aufgabe 3

Zeige die ersten beiden Eigenschaften der vorherigen Folie.

σ-Algebra

Definition

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra, falls

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$, das nennt man auch stabil (oder abgeschlossen) unter Komplementbildung,
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, das nennt man auch stabil (oder abgeschlossen) unter abzählbarer Vereinigung.

Maß

Definition

Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt $\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ ein **Maß auf** $\mathcal{A}$, falls folgende Eigenschaften gelten:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkte Mengen, so gilt $\mu(\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Wir nennen diese Eigenschaft σ-Additivität.

Ein Maß μ heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$. μ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls $\mu(\Omega) = 1$.

Aufgabe 3

Zeige die Subadditivität von Maßen, d.h. $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ für all $A, B \in \mathcal{A}$. Beachte: Gleichheit gilt für disjunkte messbare Mengen, die Ungleichung gilt für beliebige messbare Mengen.