

Stochastik I

14. Große Übung

Felix Schamoni

Prof. Dr. Leif Döring

07.12.2022

Konvergenz von Zufallsvariablen

Definition (4 Konvergenzarten)

i) $X_n \xrightarrow{P} X$ (X_n konvergiert **stochastisch** gegen X), falls für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ii) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$ (X_n konvergiert im **p-ten Mittel** gegen X), falls

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

iii) $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ (X_n konvergiert $\mathbb{P}$ -**fast sicher** gegen X), falls

$$\mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = 1.$$

iv) $X_n \xrightarrow{(d)} X$ (X_n konvergiert **in Verteilung** gegen X), falls für **alle** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt gilt

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)], \quad n \rightarrow \infty.$$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Satz (Schwaches GGZ)

(i) Sind $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, so gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1], \quad n \rightarrow \infty.$$

(ii) Variante mit schwächeren Annahmen: Sind $X_1, X_2, \dots$ quadratintegrierbar, paarweise unkorreliert (z.B. paarweise unabhängig) mit identischen Erwartungswert und

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

so gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1], \quad n \rightarrow \infty.$$

Limes inferior und superior von Mengenfolgen

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$.

(i)

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &:= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n\} \\ &= \{A_n \text{ unendlich oft}\}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ schließlich immer}\} \\ &= \{A_n \text{ schließlich immer}\}\end{aligned}$$

Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, so gelten

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0.$$

(ii) Sind $A_1, A_2, \dots$ zusätzlich paarweise unabhängig, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$$

Falls die Reihe über die Wahrscheinlichkeiten also konvergiert, liegen *fast alle* ω in nur endlich vielen Mengen A_n .

Satz

Seien $X, X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Es gilt

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) < \infty \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{f.s.} X, \quad n \rightarrow \infty.$$

(ii) Falls $X_1 - X, X_2 - X, \dots$ paarweise unabhängig sind, gilt außerdem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) = \infty \quad \text{für ein } \varepsilon > 0 \Rightarrow X_n \not\xrightarrow{f.s.} X, \quad n \rightarrow \infty.$$

Satz (Starkes GGZ)

Sind $X_1, X_2, \dots$ u.i.v mit $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ (Beweis nur für $\mathbb{E}[|X_1|^4] < \infty$), so gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}[X_1], \quad n \rightarrow \infty.$$

Angenommen ihr habt einen verformten Würfel, aber kennt die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Seiten nicht. Wie kann man durch wiederholtes, unabhängiges Würfeln die einzelnen Wahrscheinlichkeiten bestimmen?

Ges: Sei X die ZV, die die AZ des Würfels beschreibt.

Wir suchen $IP(X=j)$, $j=1, \dots, N$

(def: relative Häufigkeit von $j = \frac{\# X=j}{\sum \text{Würfe}}$

Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von Würfelwürfen und

$A_n := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = j\}$. Da $X_1, X_2, \dots$ unabh.

$\Rightarrow A_1, A_2, \dots$ unabhängige Mengen

$\Rightarrow \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sind unabhängig

Da $E[1_{A_n}] = P(X_n=j) \stackrel{i.v.}{=} P(X=j)$ gilt mit

GGLZ:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{A_k} \xrightarrow{\text{f.s.}} E[1_{A_1}] = P(X=j)$$


relative Häufigkeit
von Setz j.

Satz (ZGWS)

Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ und $\mathbb{V}[X_1] = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{(d)} Y$$

mit $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Aufgabe 2

Eine faire Münze wird 100-mal geworfen. Berechne approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze mindestens 56-mal auf *Kopf* landet.

Für $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(Y \leq \frac{6}{5}\right) \approx 0.8849$$

Seien $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. $\text{Ber}(\frac{1}{2})$ wobei X den Wert 1 annimmt, falls Münze auf Kopf landet.

$$\text{Es ist } E[X_1] = p = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(X_1) = p(1-p) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Sei } S = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$P(S \geq 56) = P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 56\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{10 \cdot \frac{1}{2}} \geq \frac{56 - 50}{5}\right)$$

$$Y \sim N(0,1) \quad \text{z.G.W.S.} \quad P(Y \geq \frac{6}{5})$$

$$P(Y \geq \frac{6}{5}) = 1 - P(Y \leq \frac{6}{5})$$

$$T.P. \approx 1 - 0.8849 = 0.1151$$

Das Lebesgue-Integral: Einfache Funktionen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{E} := \{f : f \text{ einfache Funktion}\}$ bzw.

$\mathcal{E}^+ := \{f : f \text{ einfache positive Funktion}\}$. Hierbei heißt eine Funktion **einfach**, falls $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \bar{\mathbb{R}}$ und $A_1, \dots, A_n$ existieren, sodass die A_k paarweise disjunkt sind mit $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$ und

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Für ein $f \in \mathcal{E}^+$ ist dann das **Lebesgue-Integral** definiert durch

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k).$$



Beispiel 4.5.4

Sei $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ und $\mathbb{P} = \lambda_{[0,1]}$ das Lebesguemaß auf $[0, 1]$. Definiere die Folge

$$X_n = \mathbf{1}_{(\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]}$$

wobei $m, k \in \mathbb{N}$ die eindeutigen natürlichen Zahlen mit $n = 2^k + m$ sind.

Sei $X = 0$ die Nullfunktion. Dann gilt $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$, denn

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] = \mathbb{E}[|X_n|^p] = \int_{\Omega} X_n^p(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_0^1 \mathbf{1}_{(\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]} d\lambda(\omega) = \frac{1}{2^k},$$

da $\lambda((\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]) = \frac{m+1}{2^k} - \frac{m}{2^k} = \frac{1}{2^k}$.