Stochastik I

14. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

07.12.2022

Konvergenz von Zufallsvariablen

Definition (4 Konvergenzarten)

i) $X_n \xrightarrow{P} X$ (X_n konvergiert **stochastisch** gegen X), falls für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

ii) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$ (X_n konvergiert im **p-ten Mittel** gegen X), falls

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

iii) $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ (X_n konvergiert $\mathbb{P}-$**fast sicher** gegen X), falls

$$\mathbb{P}(X_n \longrightarrow X) = 1.$$

iv) $X_n \xrightarrow{(d)} X$ (X_n konvergiert **in Verteilung** gegen X), falls für **alle** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt gilt

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)], \quad n \longrightarrow \infty.$$

Satz (Schwaches GGZ)

(i) *Sind $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, so gilt*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1], \quad n \to \infty.$$

(ii) *Variante mit schwächeren Annahmen: Sind $X_1, X_2, \ldots$ quadratintegrierbar, paarweise unkorreliert (z.B. paarweise unabhängig) mit identischen Erwartungswert und*

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) \to 0, \quad n \to \infty,$$

so gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1], \quad n \to \infty.$$

Limes inferior und superior von Mengenfolgen

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$.

(i)

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &:= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{für unendlich viele } n\} \\ &= \{A_n \text{ unendlich oft}\}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} A_n &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{schließlich immer } \} \\ &= \{A_n \text{ schließlich immer}\}\end{aligned}$$

Borel-Cantelli Lemma

Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *ein W-Raum und* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$*, so gelten*

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0.$$

(ii) *Sind* $A_1, A_2, \ldots$ *zusätzlich paarweise unabhängig, so gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$$

Falls die Reihe über die Wahrscheinlichkeiten also konvergiert, liegen *fast alle* ω in nur endlich vielen Mengen A_n.

Borel-Cantelli und fast sichere Konvergenz

Satz

Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ *Zufallsvariablen auf* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *Es gilt*

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) < \infty \quad \textit{für alle } \varepsilon > 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{f.s.} X, \quad n \longrightarrow \infty.$$

(ii) *Falls* $X_1 - X, X_2 - X, \ldots$ *paarweise unabhängig sind, gilt außerdem*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) = \infty \quad \textit{für ein } \varepsilon > 0 \Rightarrow X_n \nrightarrow X, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Starkes Gesetz der großen Zahlen

Satz (Starkes GGZ)

Sind $X_1, X_2, \ldots$ *u.i.v mit* $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ *(Beweis nur für* $\mathbb{E}[|X_1|^4] < \infty$*), so gilt*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}[X_1], \quad n \to \infty.$$

Aufgabe 1

Angenommen ihr habt einen verformten Würfel, aber kennt die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Seiten nicht. Wie kann man durch wiederholtes, unabhängiges Würfeln die einzelnen Wahrscheinlichkeiten bestimmen?

Zentraler Grenzwertsatz

Satz (ZGWS)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ *u.i.v Zufallsvariablen mit* $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ *und* $\mathbb{V}[X_1] = \sigma^2 \in (0, \infty)$. *Dann gilt*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{(d)} Y$$

mit $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Aufgabe 2

Eine faire Münze wird 100-mal geworfen. Berechne approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze mindestens 56-mal auf *Kopf* landet.

Für $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ *gilt:*

$$\mathbb{P}\left(Y \leq \frac{6}{5}\right) \approx 0.8849$$

Das Lebesgue-Integral: Einfache Funktionen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{E} := \{f : f \text{ einfache Funktion}\}$ bzw. $\mathcal{E}^+ := \{f : f \text{ einfache positive Funktion}\}$. Hierbei heißt eine Funktion einfach, falls $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$ und $A_1, \ldots, A_n$ existieren, sodass die A_k paarweise disjunkt sind mit $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$ und

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Für ein $f \in \mathcal{E}^+$ ist dann das Lebesgue-Integral definiert durch

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k).$$

Beispiel 4.5.4

Sei $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ und $\mathbb{P} = \lambda_{[0,1]}$ das Lebesguemaß auf $[0,1]$. Definiere die Folge

$$X_n = \mathbf{1}_{(\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]}$$

wobei $m, k \in \mathbb{N}$ die eindeutigen natürlichen Zahlen mit $n = 2^k + m$ sind.
Sei $X = 0$ die Nullfunktion. Dann gilt $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$, denn

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] = \mathbb{E}[|X_n|^p] = \int_\Omega X_n^p(w)\, d\mathbb{P}(w) = \int_0^1 \mathbf{1}_{(\frac{m}{2^k}, \frac{m}{2^{k+1}}]}\, d\lambda(\omega) = \frac{1}{2^k},$$

da $\lambda((\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]) = \frac{m+1}{2^k} - \frac{m}{2^k} = \frac{1}{2^k}$.