Stochastik I

13. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

30.11.2022

Konvergenz von Zufallsvariablen

Definition (Fast sichere Konvergenz)

Sei X eine Zufallsvariable und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{P}$-fast sicher gegen X, falls

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

gilt. Man schreibt

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} X.$$

- Die fast sichere Konvergenz von Zufallsvariablen ist dazu äquivalent, dass eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ existiert, sodass für alle $\omega \in N^C$

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

gilt.

Konvergenz von Zufallsvariablen

Definition ($\mathcal{L}^p$-Konvergenz)

Sei X eine Zufallsvariable und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty, \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$, für ein $p \geq 1$. Dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im p-ten Mittel (oder in $\mathcal{L}^p$) gegen X, falls

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$$

gilt. Man schreibt

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} X.$$

- Ihr kennt die $\mathcal{L}^p$-Konvergenz schon aus dem Kapitel zu $\mathcal{L}^p$-Räumen, nur wird sie hierbei explizit auf Zufallsvariablen angewendet (denkt daran Erwartungswerte sind Integrale!).

Konvergenz von Zufallsvariablen

Definition (Stochastische Konvergenz)

Sei X eine Zufallsvariable und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch (oder in Wahrscheinlichkeit) gegen X, falls für alle $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

gilt. Man schreibt

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X.$$

- Man folgert stochastische Konvergenz häufig direkt aus der Konvergenz im p-ten Mittel mit der Markov-Ungleichung (oder Spezialfall Chebyshev-Ungleichung).

Konvergenz von Zufallsvariablen

Definition (Konvergenz in Verteilung)

Sei X eine Zufallsvariable und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem (oder verschiedenen) Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X, falls für alle stetigen, beschränkten, reell-wertigen Funktionen f (oder kurz für alle $f \in C_b(\mathbb{R})$)

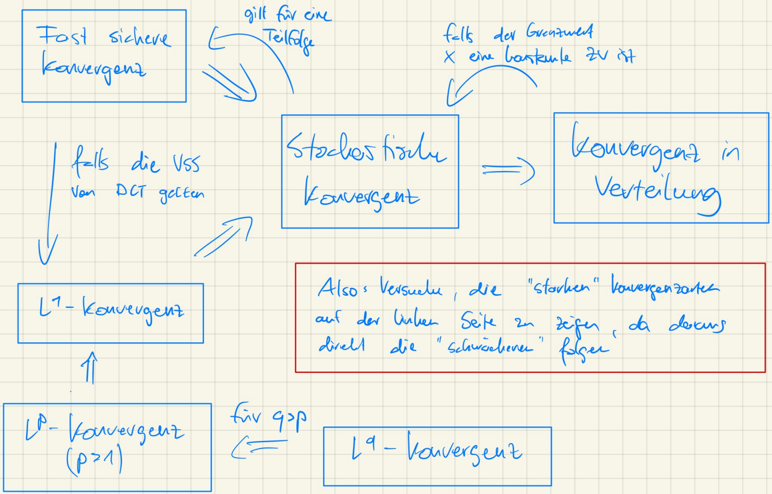
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$$

gilt. Man schreibt

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} X.$$

- Die Konvergenz in Verteilung ist die schwächste (hier behandelte) Art der Konvergenz von Zufallsvariablen.

Zusammenhang zwischen den Konvergenzarten



Satz (Alternative Charakterisierung)

Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit $X \sim F$, $X_n \sim F_n$, $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$X_n \xrightarrow{(d)} X, \quad n \to \infty \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} F_n(t) = F(t) \quad \textit{für alle Stetigkeitsstellen von } F.$$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Satz (Schwaches GGZ)

(i) *Sind* $X_1, X_2, \dots$ *u.i.v. mit* $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, *so gilt*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1], \quad n \to \infty.$$

(ii) *Variante mit schwächeren Annahmen: Sind* $X_1, X_2, \dots$ *quadratintegrierbar, paarweise unkorreliert (z.B. paarweise unabhängig) mit identischen Erwartungswert und*

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) \to 0, \quad n \to \infty,$$

so gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1], \quad n \to \infty.$$

Aufgabe 1

Sei $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit

$$U_n = \begin{cases} U, & n \text{ gerade} \\ 1-U, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

a) Zeige, dass $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen U konvergiert.
   Hinweis: Überlegt zuerst, wie $1-U$ verteilt ist.
b) Zeige, dass $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht stochastisch gegen U konvergiert.
c) Zeige, dass $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht fast sicher gegen U konvergiert.

a) Für n gerade n: $U_n \sim \mathcal{U}[0,1]$. Sei n ungerade und $t \in [0,1]$.

$$\mathbb{P}(U_n \leq t) \overset{\text{Def.}}{=} \mathbb{P}(1-U \leq t)$$

$$= \mathbb{P}(U \geq 1-t)$$

$$\overset{U \text{ stetig}}{=} 1 - \mathbb{P}(U \leq 1-t)$$

$$= 1-(1-t) = t$$

$t<0$: $\mathbb{P}(U_n \leq t) = \mathbb{P}(U \geq 1-t) = 0$

$t>1$: $\mathbb{P}(U_n \leq t) = \mathbb{P}(U \geq 1-t) = 1$.

$\Rightarrow U_n \sim \mathcal{U}[0,1] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Möglichkeit 1: Dann gilt

$$F_{U_n}(t) = t\,\mathbb{1}_{[0,1]}(t) + \mathbb{1}_{[1,\infty)}(t)$$

$$= F_U(t) \xrightarrow{n\to\infty} F_U(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Möglichkeit 2: Sei $f \in C_b(\mathbb{R})$

$$\mathbb{E}[f(U_n)] \overset{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mathbb{P}_{U_n} \overset{s.o.}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mathbb{P}_U = \mathbb{E}[f(U)]$$

b)

Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und n ungerade

$$\mathbb{P}\left(|U_n - U| > \frac{1}{2}\right) \overset{\text{Def.}}{=} \mathbb{P}\left(|1-2U| > \frac{1}{2}\right)$$

$$\underset{\text{von Maßen}}{\overset{\text{Mon.}}{\geq}} \mathbb{P}\left(1-2U > \frac{1}{2}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(U < \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

Also $\mathbb{P}\left(|U_n - U| > \frac{1}{2}\right) \not\to 0, \; n \to \infty$

c) Da U_n nicht stochastisch gegen U konv., kann auch keine fast sichere Konvergenz vorliegen.

Aufgabe 2

$\mathbb{E}[X_n] = \mu_n$ mit $\mu_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu$,

Sei $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ und $\mathbb{V}[X_n] = \frac{1}{n}$.
Zeige

$$X_n \xrightarrow{P} \mu, \; n \longrightarrow \infty.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

$$0 \le \mathbb{P}(|X_n - \mu| > \varepsilon) \underset{h(x)=x^2}{\overset{\text{Markov}}{\le}} \frac{\mathbb{E}[|X_n - \mu|^2]}{\varepsilon^2}$$

$$\underset{\text{formel}}{\overset{\text{Verschiebungs-}}{=}} \frac{\mathbb{V}(X_n)}{\varepsilon^2} \overset{\text{VSS}}{=} \frac{1}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty$$

Aufgabe 3

Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $X_n \xrightarrow{f.s} X$ für $n \to \infty$.
Zeige (direkt), dass dann auch

$$X_n \xrightarrow{(d)} X$$

gilt.

Sei $f \in C_b(\mathbb{R})$ und $N := \{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}$.

Wir wissen $\mathbb{P}(N) = 0$. Für alle $\omega \in N^c$ ist

$\lim_{n\to\infty} f(X_n(\omega)) = f(X(\omega))$, da f stetig.

Also $f \circ X_n \xrightarrow{f.s.} f \circ X$, $n \to \infty$

Da f beschränkt $\exists C > 0$ mit $|f(X_n(\omega)| \leq C$

$\forall \omega \in N^c$ $(C = \|f\|_\infty)$

Mit DCT folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} f(X_n)] \overset{\mathbb{P}(N)=0}{=} \mathbb{E}[f(X)]$$

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{(d)} X$ für $n \to \infty$.