Stochastik I

12. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

23.11.2021

Summen von (unabhängigen) Zufallsvariablen

Satz (Diskrete Faltungsformel)

Sind X, Y diskrete Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dann ist auch die Summe $X + Y$ diskret verteilt. Sind X und Y unabhängig, so gilt für die Verteilung von $X + Y$

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{b \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = k - b)\mathbb{P}(Y = b).$$

Summen von (unabhängigen) Zufallsvariablen

Definition (Faltung)

1. Sind $\mu_1 \ldots, \mu_n$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}(\mathcal{R})$, so heißt das Bildmaß vom Produktmaß $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ unter der Abbildung $h_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ **Faltung** der Maße. Wir schreiben $\mu_1 * \cdots * \mu_n$ für die Faltung.
2. Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, so heißt $\mathbb{P}_1 * \cdots * \mathbb{P}_n$ Faltung von $X_1, \ldots, X_n$. Es gilt $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathbb{P}_1 * \cdots * \mathbb{P}_n$.

Satz (Stetige Faltungsformel)

Seien μ_1, μ_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit Verteilungsfunktionen F_1, F_2, dann gelten:

1. $\mu_1 * \mu_2(B) = \int_{\mathbb{R}} \mu_1(B - y)\, d\mu_2(y)$ *für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
2. *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F_{\mu_1 * \mu_2}(t) = \int_{\mathbb{R}} F_1(t - y)\, d\mu_2(y).$$

$\mathbb{P}(g(X,Y) \le t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(-\infty,t]}(g(X,Y))] = \mathbb{E}[h(X,Y)]$

Summen Summen von (unabhängigen) Zufallsvariablen

Satz (Stetige Faltungsformel für Zufallsvariablen)

Seien X, Y unabhängige, absolutstetige Zufallsvariablen mit Dichten f_X, f_Y, dann ist auch $X + Y$ absolutstetig mit der Dichte

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x-y) f_Y(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Abkürzung über momenterzeugende Funktion

Die Faltung explizit zu berechnen ist meistens mühsam. Oft können wir aber zum Glück eine Eigenschaft der momenterzeugenden Funktion ausnutzen, um uns das Leben etwas einfacher zu machen.

Satz

Seien X, Y Zufallsvariablen für die die momenterzeugenden Funktionen $\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_Y$ in $(-\epsilon, \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ existieren. Falls $\mathcal{M}_X(t) = \mathcal{M}_Y(t)$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, so gilt $X \sim Y$.

Über die momenterzeugende Funktion der Summe von unabhängigen Zufallsvariablen können wir folgendes sagen:

Satz

Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathcal{M}_X(t), \mathcal{M}_Y(t) < \infty$ für $t \in \mathbb{R}$, so gilt auch

$$\mathcal{M}_{X+Y} = \mathcal{M}_X(t)\mathcal{M}_Y(t).$$

Aufgabe 1

Seien $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Zeige, dass für die Summe gilt

$$X + Y \sim \Gamma(2, \lambda).$$

Sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Dann gilt für $t < \lambda$

$$\mathbb{E}[e^{tX}] \overset{\text{wohldef.}}{=} \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} \, dx$$

$$= \lambda \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \right]_0^n$$

$$= - \frac{\lambda}{t-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Analog $\mathbb{E}[e^{tY}] = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$

Da X, Y unabh. sind $\mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^2 < \infty$

für alle $t \in (-\lambda, \lambda)$.

Mit Blatt 9.5 für $Z \sim \Gamma(2, \lambda)$:

$$\mathbb{E}[e^{tZ}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^2 < \infty \quad \forall t \in (-\lambda, \lambda)$$

Mit Satz aus der VL: $X+Y \sim \Gamma(2, \lambda)$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad = \mathbb{P}_B(A)$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

Definition (Unabhängigkeit)

Die Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ heißen **unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B). \qquad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$$

Sofern $\mathbb{P}(B) > 0$ ist das aquivalent zu

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Aufgabe 2

Sei $X \sim \text{Geo}(\lambda)$ für ein $p \in (0, 1)$. Zeige, dass X (bzw. die geometrische Verteilung) gedächtnislos ist, d.h.

$$\mathbb{P}(X \geq n + k | X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq n)$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Die Verteilungsfunktion F_X ist gegeben durch $F_X(n) = 1 - (1 - p)^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Seien $k, n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X \geq n+k \mid X > k) \overset{\text{Def.}}{=} \frac{\mathbb{P}(X \geq n+k,\ X > k)}{\mathbb{P}(X > k)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \geq n+k)}{\mathbb{P}(X > k)}$$

$$= \frac{1 - F_X(n+k-1)}{1 - F_X(k)}$$

$$= \frac{1 - (1 - (1-p)^{n+k-1})}{1 - (1 - (1-p)^{k})}$$

$$= (1-p)^{n-1} = P(X \geq n)$$