

Stochastik I

11. Große Übung

Felix Schamoni

Prof. Dr. Leif Döring

16.11.2022

Definition (Zufallsvektoren und gemeinsame Verteilungen)

- Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, so heißt eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ -messbare Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ **Zufallsvektor**. Die Messbarkeit von X ist hierbei äquivalent zu der Messbarkeit der einzelnen $X_1, \dots, X_d$.

- Die Funktion F_X mit

$$F_X(t_1, \dots, t_d) := \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_d \leq t_d)$$

heißt **Verteilungsfunktion** von X . Sie wird auch **gemeinsame Verteilungsfunktion** von $X_1, \dots, X_d$ genannt.

- Das Bildmaß

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

heißt **Verteilung** von X oder **gemeinsame Verteilung** von $X_1, \dots, X_d$.

Definition (Randverteilung)

- Für $k = 1, \dots, d$ heißen

$$P(X_1 \in \mathbb{R}, \dots, X_k \in B, \dots, X_d \in \mathbb{R})$$

$$\mathbb{P}_{X_k}(B) = \mathbb{P}(X_k \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

$$F_{X_k}(t) = \mathbb{P}(X_k \leq t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Randverteilung bzw. Randverteilungsfunktion.

Definition (Stetige und diskrete Zufallsvektoren)

- $X_1, X_2, \dots, X_d$ haben die gemeinsame Dichte f , falls die gemeinsame Verteilungsfunktion F_X absolutstetig ist mit Dichte f .
- In diesem Fall haben auch $X_1, \dots, X_d$ Dichten und es gilt

$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_d.$$

- $X_1, X_2, \dots, X_d$ heißen diskret, falls die gemeinsame Verteilungsfunktion F_X diskret ist.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition

- $X_1, \dots, X_d$ heißen unabhängig, falls die gemeinsame Verteilungsfunktion in die Randverteilungsfunktionen faktorisiert:

$$F_X(t_1, \dots, t_d) = F_{X_1}(t_1) \cdot \dots \cdot F_{X_d}(t_d), \quad t_i \in \mathbb{R}.$$

- Für Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte ist die genau dann der Fall, wenn die gemeinsame Dichte in die Randdichten faktorisiert:

$$\begin{aligned} P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) \\ = P(X_1 \in A_1) P(X_2 \in A_2) \end{aligned}$$

$$f(x) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_d(x_d).$$

Satz (Existenzsätze)

- Für jede multivariate Verteilungsfunktion F existiert ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und ein Zufallsvektor $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $X \sim F$.
- Unabhängige Zufallsvariablen existieren!

Aufgabe 1

Seien X, Y Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit gemeinsamer Dichte

$$f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty), \quad (x, y)^T \mapsto \begin{cases} 2e^{-x-y}, & 0 < x < y < \infty \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme die Dichten der Randverteilungen von (X, Y) . Sind X und Y unabhängig?

Nach VL gilt

$$\{(x, y) : 0 < x < y < \infty\}$$

$$f_x(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(x,y)}(x,y) dy$$

Sei $x > 0$ fest

$$= \int_{\mathbb{R}} 2e^{-x-y} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \mathbb{1}_{(x,\infty)}(y) \underbrace{(\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \mathbb{1}_{(x,\infty)}(y))}_{=1} dy$$

$$= \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) 2e^{-x} \int_x^{\infty} e^{-y} dy$$

$$\stackrel{\text{NCT}}{=} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) 2e^{-x} \lim_{n \rightarrow \infty} [-e^{-y}]_x^n$$

$$= \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) 2e^{-x} e^{-x} = 2e^{-2x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

Analog gilt für Y :

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y) dx \\&= \int_{\mathbb{R}} 2e^{-x-y} 1_{(0,\infty)}(y) 1_{(0,y)}(x) dx \\&= 2e^{-y} 1_{(0,\infty)}(y) \int_0^y e^{-x} dx \\&= 2e^{-y} 1_{(0,\infty)}(y) [-e^{-x}]_0^y \\&= 2e^{-y} (1 - e^{-y}) 1_{(0,\infty)}(y)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_x(x) \cdot f_y(y) \neq f_{(x,y)}(x,y)$$

(z.B. wähle $x > y$)

$\Rightarrow x, y$ nicht unabhängig

$$E(xy) = \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot y \cdot f_{(x,y)}(x,y) d\mu(x,y)$$

Definition

Seien $X_1, \dots, X_d$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann sei

$$\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_d)] := \int_{\Omega} g(X_1(\omega), \dots, X_d(\omega)) d\mathbb{P}(\omega),$$

falls das Integral wohldefiniert ist. Wir sprechen vom Erwartungswert der Zufallsvariable $Y := g(X_1, \dots, X_d)$.

Satz (Berechnungsregeln)

Mit dem Trafosatz gilt wieder

$$\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_d)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, \dots, x_d) d\mathbb{P}_X(x_1, \dots, x_d),$$

falls eines der Integrale wohldefiniert ist. $\mathbb{P}_X$ bezeichnet hierbei die gemeinsame Verteilung von $X = (X_1, \dots, X_d)$.

Satz (Berechnungsregeln für stetige und diskrete ZV)

- Haben $X_1, \dots, X_d$ eine gemeinsame Dichte f , so gilt

$$\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_d)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, \dots, x_d) f(x_1, \dots, x_d) d(x_1, \dots, x_d);$$

- Sind $X_1, \dots, X_d$ diskret, d.h. der Zufallsvektor X nimmt die Vektoren $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}^d$ mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_N$ an, so gilt

$$\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_d)] = \sum_{k=1}^N p_k g(a_k) = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(X = a_k) g(a_k).$$

Auch hier gilt die Gleichheit nur, falls einer der beiden Seiten wohldefiniert ist.

- Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_d$ und messbare Funktionen $g_1, \dots, g_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[g_1(X_1) \cdots g_d(X_d)] = \mathbb{E}[g_1(X_1)] \cdots \mathbb{E}[g_d(X_d)].$$

Definition

- Sind X, Y quadratintegrierbare Zufallsvariablen, so heißt

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

Kovarianz von X und Y .

- Sind $\mathbb{V}[X], \mathbb{V}[Y] \neq 0$, so heißt

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]\mathbb{V}[Y]}}$$

Korrelation von X und Y .

- Ist $\rho(X, Y) = 0$, so heißen X und Y **unkorreliert**.

Satz (Bienaymé)

Sind $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[X_1^2], \dots, \mathbb{E}[X_d^2] < \infty$, so gelten

(i)

$$\mathbb{V} \left[\sum_{k=1}^n X_k \right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}[X_k] + \sum_{k,l=1, k \neq l}^n \text{Cov}(X_k, X_l).$$

(ii) Falls $X_1, \dots, X_n$ paarweise unkorreliert sind ($\text{Cov}(X_k, X_l) = 0$ für $k \neq l$), so gilt

$$\mathbb{V} \left[\sum_{k=1}^n X_k \right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}[X_k].$$

Aufgabe 2

- Seien X und Y unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Berechne $\text{Cov}(aX + bY, cX + dY)$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
- Seien X und Y wieder unabhängige, quadratintegrierbare Zufallsvariablen mit $\mathbb{V}[X], \mathbb{V}[Y] \neq 0$. Zeige, dass X und Y auch unkorreliert sind, d.h. $\rho(X, Y) = 0$.
- Zeige, dass für X und Y mit positiven, endlichen zweiten Momenten die Abschätzung $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$ gilt.
Hinweis: Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Hölder mit $p = q = 2$.)

(1) $0 = X, Y \sim N(0,1)$ gilt

$$E[aX + bY] \stackrel{\text{lin.}}{=} a \underbrace{E[X]}_{=0} + b \underbrace{E[Y]}_{=0} = 0$$

Mit Bilinearität: X, Y unabh.

$$V(aX + bY) = V(aX) + V(bY)$$

$$\stackrel{\text{lin.}}{=} a^2 V(X) + b^2 V(Y) = a^2 + b^2 < \infty$$

Also

$$\text{Cov}(aX + bY, cX + dY) = E[(aX + bY)(cX + dY)]$$

$$= E[acx^2 + bdy^2 + (ad+bc)xy]$$

$$\stackrel{\text{lin.}}{=} ac \underbrace{E[x^2]} + bd E[y^2] + (ad+bc) \underbrace{E[xy]}$$

$= 1$, da
 $x \sim N(0,1)$

xy
 unabh. $= E[x]E[y] = 0$
 da $x, y \sim N(0,1)$

$$= ac + bd$$

(ii) Sei $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \mathbb{E}[x]$ &

$$g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto y - \mathbb{E}[y]$$

Dann sind g_1, g_2 messbar und es gilt

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \mathbb{E}[g_1(X) g_2(Y)]$$

$$\underset{\text{unabh}}{X, Y} = \mathbb{E}[g_1(X)] \mathbb{E}[g_2(Y)]$$

$$= \underline{\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] \mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[Y]]} = 0$$

$$\begin{aligned} & \text{Var}(X), \text{Var}(Y) \neq 0 \\ \Rightarrow \rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} = 0 \end{aligned}$$

$$(iii) \quad |\text{Cov}(X, Y)| \stackrel{\text{Def.}}{=} |E[(X - E[X])(Y - E[Y])]|$$

$$\Delta \leq E[|X - E[X]| |Y - E[Y]|]$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{C-S-}}{\text{Ineq.}} \leq (E[|X - E[X]|^2])^{1/2} (E[(Y - E[Y])^2])^{1/2} \\ & = \sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow |\rho(X, Y)| \leq 1$$