Stochastik I

11. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

16.11.2022

Zufallsvektoren

Definition (Zufallsvektoren und gemeinsame Verteilungen)

- Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, so heißt eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-messbare Abbildung $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ **Zufallsvektor**. Die Messbarkeit von X ist hierbei äquivalent zu der Messbarkeit der einzelnen $X_1, \ldots, X_d$.
- Die Funktion F_X mit
$$F_X(t_1, \ldots, t_d) := \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \ldots, X_d \leq t_d)$$
heißt **Verteilungsfunktion** von X. Sie wird auch **gemeinsame Verteilungsfunktion** von $X_1, \ldots, X_d$ genannt.
- Das Bildmaß
$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$
heißt **Verteilung** von X oder **gemeinsame Verteilung** von $X_1, \ldots, X_d$.

Zufallsvektoren

Definition (Randverteilung)

- Für $k = 1, \dots, d$ heißen

$$\mathbb{P}_{X_k}(B) = \mathbb{P}(X_k \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$
$$F_{X_k}(t) = \mathbb{P}(X_k \le t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Randverteilung bzw. **Randverteilungsfunktion**.

Definition (Stetige und diskrete Zufallsvektoren)

- $X_1, X_2, \dots, X_d$ haben die gemeinsame Dichte f, falls die gemeinsame Verteilungsfunktion F_X absolutstetig ist mit Dichte f.
- In diesem Fall haben auch $X_1, \dots, X_d$ Dichten und es gilt

$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d)\, dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_d.$$

- $X_1, X_2, \dots, X_d$ heißen diskret, falls die gemeinsame Verteilungsfunktion F_X diskret ist.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition

- $X_1, \ldots, X_d$ heißen unabhängig, falls die gemeinsame Verteilungsfunktion in die Randverteilungsfunktionen faktorisiert:

$$F_X(t_1, \ldots, t_d) = F_{X_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_d}(t_d), \quad t_i \in \mathbb{R}.$$

- Für Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte ist die genau dann der Fall, wenn die gemeinsame Dichte in die Randdichten faktorisiert:

$$f(x) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_d(x_d).$$

Satz (Existenzsätze)

- *Für jede multivariate Verteilungsfunktion F existiert ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und ein Zufallsvektor $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ mit $X \sim F$.*
- *Unabhängige Zufallsvariablen existieren!*

Aufgabe 1

Seien X, Y Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit gemeinsamer Dichte

$$f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty), \quad (x, y)^T \mapsto \begin{cases} 2e^{-x-y}, & 0 < x < y < \infty \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme die Dichten der Randverteilungen von (X, Y). Sind X und Y unabhängig?

Erwartungswerte

Definition

Seien $X_1, \ldots, X_d$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann sei

$$\mathbb{E}[g(X_1, \ldots, X_d)] := \int_\Omega g(X_1(\omega), \ldots, X_d(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega),$$

falls das Integral wohldefiniert ist. Wir sprechen vom Erwartungswert der Zufallsvariable $Y := g(X_1, \ldots, X_d)$.

Satz (Berechnungsregeln)

Mit dem Trafosatz gilt wieder

$$\mathbb{E}[g(X_1, \ldots, X_d)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, \ldots, x_d)\, d\mathbb{P}_X(x_1, \ldots, x_d),$$

falls eines der Integrale wohldefiniert ist. $\mathbb{P}_X$ bezeichnet hierbei die gemeinsame Verteilung von $X = (X_1, \ldots, X_d)$.

Berechnungsregeln

Satz (Berechnungsregeln für stetige und diskrete ZV)

- *Haben $X_1, \dots, X_d$ eine gemeinsame Dichte f, so gilt*

$$\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_d)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, \dots, x_d) f(x_1, \dots, x_d)\, d(x_1, \dots, x_d);$$

- *Sind $X_1, \dots, X_d$ diskret, d.h. der Zufallsvektor X nimmt die Vektoren $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}^d$ mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_N$ an, so gilt*

$$\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_d)] = \sum_{k=1}^{N} p_k g(a_k) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X = a_k) g(a_k).$$

  Auch hier gilt die Gleichheit nur, falls einer der beiden Seiten wohldefiniert ist.

- *Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_d$ und messbare Funktionen $g_1, \dots, g_d : \mathbb{R}\mathbb{R}$ gilt*

$$\mathbb{E}[g_1(X_1) \cdot \dots \cdot g_d(X_d)] = \mathbb{E}[g_1(X_1)] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[g_d(X_d)].$$

Varianz, Kovarianz und Korrelation

Definition

- Sind X, Y quadratintegrierbare Zufallsvariablen, so heißt

  $$\mathrm{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

  Kovarianz von X und Y.
- Sind $\mathbb{V}[X], \mathbb{V}[Y] \neq 0$, so heißt

  $$\rho(X, Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]\mathbb{V}[Y]}}$$

  Korrelation von X und Y.
- Ist $\rho(X, Y) = 0$, so heißen X und Y **unkorreliert**.

Satz (Bienaymé)

Sind $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[X_1^2], \ldots, \mathbb{E}[X_d^2] < \infty$, so gelten

(i)

$$\mathbb{V}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}[X_k] + \sum_{k,l=1,k\neq l}^{n} \mathrm{Cov}(X_k, X_l).$$

(ii) *Falls $X_1, \ldots, X_n$ paarweise unkorreliert sind ($\mathrm{Cov}(X_k, X_l) = 0$ für $k \neq l$), so gilt*

$$\mathbb{V}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}[X_k].$$

Aufgabe 2

- Seien X und Y unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Berechne $\mathrm{Cov}(aX + bY, cX + bY)$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
- Seien X und Y wieder unabhängige, quadratintegrierbare Zufallsvariablen mit $\mathbb{V}[X], \mathbb{V}[Y] \neq 0$. Zeige, dass X und Y auch unkorreliert sind, d.h. $\rho(X, Y) = 0$.
- Zeige, dass für X und Y mit positiven, endlichen zweiten Momenten die Abschätzung $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$ gilt.
  Hinweis: Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Hölder mit $p = q = 2$.)