

Übung 9

Aufgabe 1

Da $e^{tx} \geq 0$ und messbar als Verknüpfung von messbaren Funktionen ($\omega \mapsto X(\omega)$ ist messbar, da X ZV & $x \mapsto e^{tx}$ ist messbar, da stetig) ist der Erwartungswert $E[e^{tx}]$ immer wohldefiniert. Dies gilt für alle $t \in \mathbb{R}$.

ABER: Die momenterzeugende Funktion ist trotzdem nur auf der Menge $\{t \in \mathbb{R} : E[e^{tx}] < \infty\}$ definiert.

Also berechnen wir

$$E[e^{tx}] \stackrel{\text{Def.}}{=} \int_{\Omega} e^{tX(\omega)} dP(\omega) \stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dP_x(x)$$

$$\begin{array}{l} \text{RE für} \\ \text{diskrete} \\ \text{Verteilungen} \\ X \sim \text{Ber}(p) \end{array} = p_1 e^{t \cdot 1} + (1-p_1) e^{t \cdot 0} = p_1 e^t + 1 \cdot p_1 < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow M_X(t) = p_1 e^t + 1 \cdot p_1 \text{ ist definiert } \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Somit gilt } E[X^k] = M_X^{(k)}(0).$$

Berechne:

$$M_X'(t) = p_1 e^t \Rightarrow E[X] = M_X'(0) = p_1$$

$$M_X''(t) = p_1 e^t \Rightarrow E[X^2] = M_X''(0) = p_1.$$

Aus der Verschiebungsformel folgt

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = p_1^2 - p_1^2 = p_1(1-p_1).$$

Ebenso:

$$\mathbb{E}[e^{tY}] \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\Omega} e^{tY(\omega)} d\mathbb{P}(\omega) \stackrel{\text{Trasf.}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\mathbb{P}_Y(x)$$

$$\begin{aligned} \text{ZB für diskrete VF } Y \sim \text{Geom}(p) &= p_2 \sum_{k=1}^{\infty} (1-p_2)^{k-1} e^{tk} \stackrel{\text{Indexversh.}}{=} p_2 e^t \sum_{k=0}^{\infty} (1-p_2)^k e^{tk} \\ &= p_2 e^t \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p_2)e^t)^k \end{aligned}$$

Wir wollen die geometrische Summenformel anwenden,

dafür brauchen wir aber $(1-p_2)e^t < 1 \Leftrightarrow t < -\ln(1-p_2)$

Für $t \in (-\infty, -\ln(1-p_2))$ ist der EV also endlich mit

$$M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = p_2 e^t \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p_2)e^t)^k$$

$$\text{geo. Reihe} = \frac{p_2 e^t}{1 - e^t(1-p_2)}$$

Da $-\ln(1-p_2) > 0$ für $p_2 \in (0,1)$ ex. $\varepsilon > 0$, sodass

$\mathbb{E}[e^{tY}] < \infty \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Also gilt auch hier

$$\mathbb{E}[Y^k] = M_Y^{(k)}(0). \text{ Es gilt}$$

je nach
Produkt-/
Kettenregel

$$\bullet M_Y'(t) = \frac{p_2 e^t}{1 - e^t(1-p_2)} + \frac{p_2 e^t e^t(1-p_2)}{(1 - e^t(1-p_2))^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Y] = M_Y'(0) = \frac{p_2}{p_2} + \frac{p_2(1-p_2)}{p_2^2} = \frac{1}{p_2}$$

$$\bullet M_Y''(t) = M_Y'(t) + \frac{2p_2(1-p_2)e^{2t}}{(1 - e^t(1-p_2))^2} + \frac{p_2(1-p_2)e^{2t}(-2)(-e^t(1-p_2))}{(1 - e^t(1-p_2))^3}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Y^2] = M_Y''(0)$$

$$= \frac{1}{p_2} + \frac{2p_2(1-p_2)}{p_2^2} + \frac{2p_2(1-p_2)(1-p_2)}{p_2^3}$$

$$= \frac{p_2 + 2p_2 - 2p_2^2 + 2(1-p_2)^2}{p_2^2} = \frac{p_2 + 2p_2 - 2p_2^2 + 2 - 4p_2 + 2p_2^2}{p_2^2}$$

$$= \frac{2 - p_2}{p_2^2}$$

Verschiebungs-
formel $\Rightarrow$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - [\mathbb{E}[Y]]^2 = \frac{2-p_2}{p_2^2} - \frac{1}{p_2^2} = \frac{1-p_2^2}{p_2^2}$$

Aufgabe 3

Überprüfe die Eigenschaften:

(i) Es gilt $0 \leq F \leq 1$, da $0 \leq F_k \leq 1 \quad \forall k \in \{1, \dots, d\}$
(F_k sind Verteilungsfunktionen)

(ii) Für $k \in \{1, \dots, d\}$ gilt $\lim_{t_k \rightarrow -\infty} F_k(t_k) = 0$, da F_k VF
 $\Rightarrow 0 \leq \lim_{t_1, \dots, t_d \rightarrow -\infty} F(t_1, \dots, t_d) \stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{t_1, \dots, t_d \rightarrow -\infty} \prod_{i=1}^d F_i(t_i)$

$$F(\infty, \dots, \infty) \leq \lim_{t_k \rightarrow -\infty} F_k(t_k) = 0.$$

(iii) Ebenso gilt $\lim_{t_k \rightarrow \infty} F_k(t_k) = 1$, da F_k VF für $k \in \{1, \dots, d\}$

$$\Rightarrow \lim_{t_1, \dots, t_d \rightarrow \infty} F(t_1, \dots, t_d) \stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{t_d \rightarrow \infty} F_1(t_1) \cdot \dots \cdot F_d(t_d)$$

$$\begin{aligned} & \text{F}_k \text{ unabh. von } t_j \text{ für } k \neq j. \\ & \lim_{t_1 \rightarrow \infty} F_1(t_1) \lim_{t_2 \rightarrow \infty} F_2(t_2) \dots \lim_{t_d \rightarrow \infty} F_d(t_d) \\ & \quad \underbrace{\phantom{\lim_{t_1 \rightarrow \infty} F_1(t_1)}}_{=1} \end{aligned}$$

$$= 1.$$

(iv) Sei $(t_n^k)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ Folge mit $t_n^k \downarrow t_k, n \rightarrow \infty$.

$$\Rightarrow \lim_{t_1^k \downarrow t_1} F(t_1, \dots, t_n^k, \dots, t_d) = \lim_{t_1^k \downarrow t_1} F_1(t_1) \cdot \dots \cdot F_k(t_n^k) \cdot \dots \cdot F_d(t_d)$$

$$= F_1(t_1) \cdot \dots \cdot \lim_{t_1^k \downarrow t_1} F_k(t_n^k) \cdot \dots \cdot F_d(t_d)$$

$$\begin{aligned} & \text{F}_k \text{ ist VF} \\ & = F_1(t_1) \cdot \dots \cdot F_k(t_k) \cdot \dots \cdot F_d(t_d) = F(t_1, \dots, t_k, \dots, t_d) \end{aligned}$$

(v) Seien $t^1, t^2 \in \mathbb{D}^d$ mit $t^1 \leq t^2$ (also $t_1^1 \leq t_1^2, t_2^1 \leq t_2^2, \dots, t_d^1 \leq t_d^2$).

$$\Delta_{t^1}^{t^2} F \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{i_1=1}^2 (-1)^{i_1} \sum_{i_2=1}^2 (-1)^{i_2} \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_d} F(t_1^{i_1}, \dots, t_d^{i_d})$$

Es gilt

$$\sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_d} F(t_1^{i_1}, \dots, t_d^{i_d})$$

$$(*) \quad = F(t_1^{i_1}, \dots, t_{d-1}^{i_{d-1}}, t_d^2) - F(t_1^{i_1}, \dots, t_{d-1}^{i_{d-1}}, t_d^1)$$

Def von F eins. + ausklammern

$$= \left[F_1(t_1^{i_1}) F_2(t_2^{i_2}) \dots F_{d-1}(t_{d-1}^{i_{d-1}}) \right] (F_d(t_d^2) - F_d(t_d^1))$$

(*) einsetzen

$$\Rightarrow \Delta_{t^1}^{t^2} F = \sum_{i_1=1}^2 (-1)^{i_1} \sum_{i_2=1}^2 (-1)^{i_2} \dots \sum_{i_{d-1}=1}^2 (-1)^{i_{d-1}} \left[F_1(t_1^{i_1}) \dots F_{d-1}(t_{d-1}^{i_{d-1}}) \right] (F_d(t_d^2) - F_d(t_d^1))$$

20, da F_d VF $\Rightarrow$ nicht fallend

unabh. von $i_1, \dots, i_{d-1}$

vor die Summen ziehen

gleiche Rechnung $d-1$ mal

$$= \dots = \prod_{i=1}^d \left[F_i(t_i^2) - F_i(t_i^1) \right] \geq 0$$

20, da F_i VF & $t^1 \leq t^2$

Zusatzaufgabe

Definiere $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto x^a$.

Da $g(x)$, $x \geq 0$ und messbar sind die Integrale wohldefiniert.

Es ist $g \in C^2((0, \infty), (0, \infty))$

$$\text{mit } g'(x) = a x^{a-1}$$

$$g''(x) = (a-1)a x^{a-2}$$

Also g konvex $\Leftrightarrow a \geq 1$.

Vergleiche nun $E[X^a]$ & $E[X]^a$ bzw. $E[g(X)]$ & $g(E[X])$

(i) Für $a \in [0, 1]$ gilt offensichtlich Gleichheit

(ii) Für $a \geq 1$ gilt mit Jensen:

$$E[X^a] = E[g(X)] \geq g(E[X]) = E[X]^a$$

(iii) Für $0 < a < 1$ ist $-g$ konvex. Mit Jensen folgt analog

$$E[-X^a] = E[-g(X)] \geq -g(E[X]) = -E[X]^a$$

$$\Rightarrow E[X]^a \geq E[X^a].$$

□