Stochastik I

10. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

09.11.2022

Momenterzeugende Funktion von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\mathcal{M}_X \colon D \mapsto [0, \infty), \quad t \mapsto \mathcal{M}_X(t) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}]$$

momenterzeugende Funktion von X, wobei

$$D := \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] < \infty\}.$$

- Es gilt immer $D \neq \emptyset$, da $\mathcal{M}_X(0) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{0X}] = \mathbb{E}[1] = 1 < \infty$.
- Falls ein $\epsilon > 0$ existiert, mit $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq D$ (d.h. $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] < \infty \, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$), so gilt nach der Vorlesung

  $$\mathbb{E}[X^k] = \mathcal{M}_X^{(k)}(0),$$

  wobei $\mathcal{M}_X^{(k)}$ die k-te Ableitung bezeichne.
  $\rightsquigarrow$ Deshalb momenterzeugende Funktion.

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf dem die Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{Ber}(p_1)$, $Y \sim \mathrm{Geo}(p_2)$ mit $p_1, p_2 \in (0, 1)$ definiert sind. Also gilt

$$\mathbb{P}(X = 1) = p_1, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p_1$$

und

$$\mathbb{P}(Y = k) = p_2(1 - p_2)^{k-1} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Berechne die momenterzeugenden Funktionen von X und Y und bestimme damit die Erwartungswerte und die Varianzen von X und Y.

Hinweis: Für die Berechnung der Varianz hilft die Verschiebungsformel.

Borel-σ-Algebra auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Definition (Borel-σ-Algebra auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$)

Als σ-Algebra auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definieren wir die Produkt-σ-Algebra, die aus d Kopien der Borel-σ-Algebra besteht, d.h.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_d : B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}).$$

Anstatt $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zu betrachten, reicht es auch wieder nur Mengen aus einem Erzeuger zu nehmen. So gilt z.B. auch

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) &= \sigma(\{O \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}\mathbb{d}) : O \text{ offen}) \\ &= \sigma(\{(-\infty, t_1] \times (-\infty, t_2] \times \cdots \times (\infty, t_d] : t_i \in \mathbb{R}\}) \\ &= \ldots\end{aligned}$$

Welche Erzeuger kennt ihr noch?

Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und multivariate Verteilungsfunktionen

Definition (Maße und Verteilungsfunktionen auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$)

Ist $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, so heißt

$$F_{\mathbb{P}}(t_1, \ldots, t_d) := \mathbb{P}((-\infty, t_1] \times \cdots \times (-\infty, t_d])$$

multivariate Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$.

Wie im 1-dimensionalen Fall gibt es auch zu jeder multivariaten Verteilungsfunktion ein zugehöriges W-Maß, sodass $F_{\mathbb{P}}(t_1, \ldots, t_d) = \mathbb{P}((-\infty, t_1] \times \cdots \times (-\infty, t_d])$ gilt. Für multivariate Verteilungsfunktionen gelten die gleichen Eigenschaften wie für $d = 1$, nur die Monotonie sieht etwas fies aus.

Multivariate Verteilungsfunktionen

Definition (Multivariate Verteilungsfunktionen)

Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *multivariate Verteilungsfunktion*, falls

(i) $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, 1]$.

(ii) F konvergiert gegen 0, falls (mindestens) eine Koordinate nach $-\infty$ läuft:

$$\lim_{t_1 \to -\infty} F(t_1, \ldots, t_d) = \cdots = \lim_{t_d \to -\infty} F(t_1, \ldots, t_d) = 0.$$

(iii) F konvergiert gegen 1, falls alle Koordinaten gemeinsam nach $+\infty$ laufen:

$$\lim_{t_1, \ldots, t_d \to \infty} F(t_1, \ldots, t_d) = 1.$$

(iv) F ist rechtsstetig in jeder Koordinate.

(v) F ist rechtecksmonoton, d.h. für alle $a^1, a^2 \in \mathbb{R}^d$ mit $a^1 \leq a^2$ (d.h. $a_k^1 \leq a_k^2$ für alle k) gilt

$$\Delta_{a^1}^{a^2} F := \sum_{i_1, \ldots, i_d \in \{1,2\}} (-1)^{i_1 + \cdots + i_d} F(a_1^{i_1}, \ldots, a_d^{i_d}) \geq 0.$$

Aufgabe 2

Seien $F_1, F_2, \ldots, F_d$ reelle Verteilungsfunktionen. Zeige, dass dann die Funktion $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(t_1, \ldots, t_d) := F_1(t_1) \cdot \ldots \cdot F_d(t_d)$$

eine multivariate Verteilungsfunktion ist.

Aufgabe 3 (Zusatzaufgabe)

Sei X eine positive Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Für $\alpha \geq 0$ vergleiche $\mathbb{E}[X^\alpha]$ und $\mathbb{E}[X]^\alpha$, unter der Annahme, dass $\mathbb{E}[|X|^\alpha] < \infty$ gilt.

Hinweis: Jensen-Ungleichung.