Stochastik I

4. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

28.09.2022

Verteilungsfunktionen

Definition

Eine Funktion

$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \quad x \mapsto F(x),$$

welche die Eigenschaften

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

ii) F ist monoton steigend,

iii) F ist rechtsseitig stetig,

iv) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$,

erfüllt, heißt Verteilungsfunktion.

- Auf dem Übungsblatt habt Ihr gezeigt, dass jede Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes diese vier Eigenschaften erfüllt.

$\mathbb{P}$ W-Maß: $F(t) := \mathbb{P}((-\infty, t])$

Aufgabe 1

Sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto f(x),$$

eine stetige (stetig ist i.A. nicht nötig) und integrierbare Funktion, die die Eigenschaften

i) $f \geq 0$,
ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$,

erfüllt. Zeige, dass

$$F(t) := \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad t \in \mathbb{R},$$

eine Verteilungsfunktion ist.

(1) Es gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$0 \overset{\text{(i)+Mon.}}{\leq} \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx \overset{\text{(i)+Mon.}}{\leq} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \overset{\text{(ii)}}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq F(t) \leq 1$$

(2) Sei $t_2 \geq t_1$:

$$F(t_2) - F(t_1) \overset{\text{Def.}}{=} \int_{-\infty}^{t_2} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{t_1} f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{f(x)}_{\geq 0}\,dx \overset{\text{(i)}}{\geq} 0$$

(3) Sei $(t_n)_{n\geq 1}$ Folge $t_n \downarrow t$. Es gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \mathbb{1}_{[-\infty, t_n]}(x) \longrightarrow f(x) \mathbb{1}_{[-\infty, t]}(x) \quad \text{punktweise}$$

Außerdem $| f(x) \mathbb{1}_{[-\infty, t]}(x) | \leq |f(x)|$ mit

f integrierbar. Mit DCT

$$F(t_n) \overset{\text{Def.}}{=} \int_{-\infty}^{t_n} f(x)\,dx = \int f(x) \mathbb{1}_{[-\infty, t_n]}(x)\, dx$$

$$\overset{\text{DCT}}{\longrightarrow} \int f(x) \mathbb{1}_{[-\infty, t]}(x)\, dx = F(t)$$

(4) Analog zu (3): $f(x)\mathbb{1}_{[-\infty,t]}(x) \longrightarrow 0, \; t \to -\infty$

$$\underbrace{f(x)\mathbb{1}_{[-\infty,t]}}_{\text{messbar als Produkt}}(x) \longrightarrow f(x), \; t \to \infty$$

und f als integrierbare Majorante. Also gilt mit DCT

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int f(x)\mathbb{1}_{[-\infty,t]}(x) \longrightarrow \begin{cases} \int 0\,dx = 0, & t \to -\infty \\ \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \overset{(ii)}{=} 1, & t \to \infty \end{cases}$$

Definition

Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann heißt die Funktion

$$F \colon \mathbb{R} \to [0, 1], \quad x \mapsto \mathbb{P}((-\infty, x])$$

Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$.

- Es gilt:

$$\mathbb{P}((a, b]) = F(b) - F(a)$$

für $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Verteilungsfunktionen und W-Maße

Sei $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ ein W-Raum. Wir können die Verteilung des Wahrscheinlichkeitsmaßes nun durch zwei verschiedene Objekte beschreiben. Zum einen der abstrakte Begriff des Maßes, d.h. eine Abbildung

$$\mathbb{P} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1], \quad A \mapsto \mathbb{P}(A).$$

Maße können wir für beliebige σ-Algebren definieren, die Definition ist sehr allgemein. Für den Fall $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ können wir auch Verteilungsfunktionen betrachten, d.h. Abbildungen $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$. Diese sind sehr viel anschaulicher und es gibt eine 1-zu-1 Beziehung von W-Maßen auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und Verteilungsfunktionen. (Stichwort: Carathéodory)
Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$:

$$\mathbb{P}((a,b]) = F(b) - F(a).$$

Verteilungsfunktionen und Dichten

Falls eine Verteilungsfunktion absolut stetig oder diskret ist, können wir noch ein weiteres Objekt betrachten, nämlich Dichtefunktionen (siehe Aufgabe 1).
Für den **absolut stetigen Fall** haben wir dies schon in Aufgabe 1 gesehen, da für eine Dichtefunktion f durch

$$F(t) := \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx$$

eine Verteilungsfunktion definiert wird. Die Verteilung der Masse des zugehörigen W-Maßes wird durch die Dichte nochmal deutlicher charakterisiert, siehe nächste Folie.
Es gilt nämlich

$$\mathbb{P}_F(A) = \int_A f(x)\, dx.$$

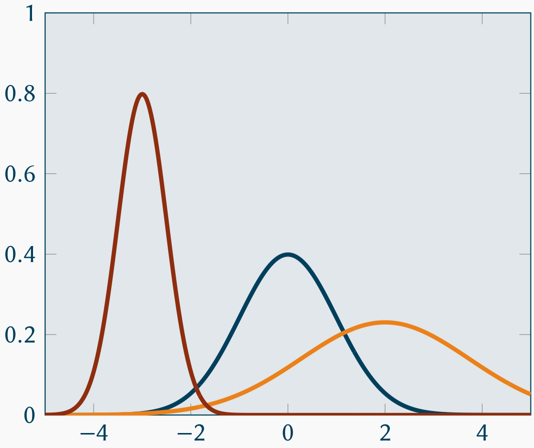
Verteilungsfunktionen und Dichten

Die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ ist definiert als das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktion

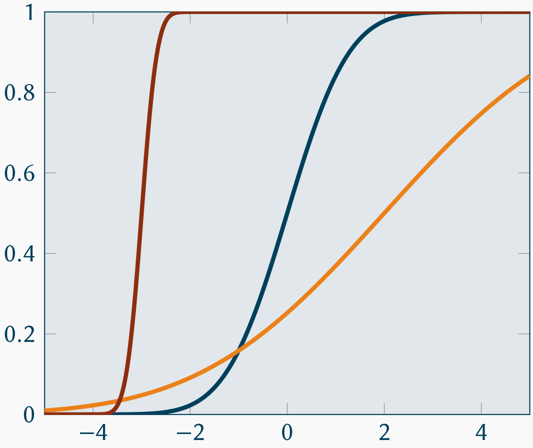
$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \quad t \mapsto \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x.$$

Welchen Einfluss haben die beiden Parameter μ und σ?

Die Normalverteilung ($\mu = -3$, $\sigma^2 = \frac{1}{4}$ Rot, $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ Blau, $\mu = 2$, $\sigma^2 = 3$ Orange)

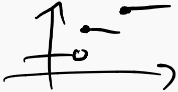


Dichten



Verteilungsfunktionen (näherungsweise)

Diskrete Verteilung



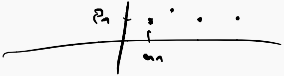
$$\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$$

Ist F **diskret** mit Werten $a_1, \ldots, a_N$ und Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_N$, so gilt

$$F(t) = \sum_{k=1}^{N} p_k \mathbf{1}_{[a_k,\infty)}, \quad \text{und} \quad \mathbb{P}_F(A) = \sum_{a_k \in A} p_k.$$

$\mathbb{P}$ hat also viel Masse im Punkt a_k, falls die zugehörige Wahrscheinlichkeit p_k groß ist.

Zähldichte: $f(a_k) = p_k$



Aufgabe 2

Zeige, dass für eine absolutstetige Verteilungsfunktion F mit Dichte f tatsächlich gilt

$$\mathbb{P}_F(A) = \int_A f(x)\, dx$$

für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Hinweis: Ihr dürft annehmen, dass es sich bei der rechten Seite um ein Maß handelt.

$\mathcal{E} = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{Q}, a \leq b\}$

Sei $\mathcal{D} = \{ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mathbb{P}_F(A) = \int_A f(x)\,dx \}$ $\left(= \mathcal{B}(\mathbb{R}) \right)$

Beh: $\mathcal{D}$ ist Dynkin System

- $\mathbb{R} \in \mathcal{D}$: $\mathbb{P}_F(\mathbb{R}) = 1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$
- Sei $A \in \mathcal{D}$: $\mathbb{P}_F(A^c) = 1 - \mathbb{P}_F(A) \overset{A \in \mathcal{D}}{=} 1 - \int_A f(x)\,dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx - \int_A f(x)\,dx$$

$$\overset{\text{RR}}{\underset{\text{Int.}}{=}} \int_{\mathbb{R}\setminus A} f(x)\,dx$$

Sei $A_1, A_2, \ldots \overset{\in \mathcal{F}}{}$ disjunkt

$$\mathbb{P}_F\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n\right) \overset{\sigma\text{-Add}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_F(A_n) \overset{A_n \in \mathcal{F}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\,dx$$

$$\overset{(*)}{=} \int \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) f(x)\,dx$$

$$\underset{\text{Gü } 1}{\overset{A_n \text{ disj.}}{=}} \int \mathbb{1}_{\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n} f(x)\,dx$$

$$= \int_{\dot{\bigcup} A_n} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ Dynkin System

Zu (*):

Def $f_N = \sum_{n=1}^{N} f(x) 1\!\!1_{A_n}(x) \xrightarrow{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(x) 1\!\!1_{A_n}(x)$ pktweise

und es gilt: $\cdot\, f_N$ ist monoton in N

($\cdot\, f_N$ ist messbar als Summe mb Fkt.)

$$\overset{MCT}{\Longrightarrow} \int \sum_{n=1}^{\infty} f(x) 1\!\!1_{A_n}(x)\, dx = \int \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(x) 1\!\!1_{A_n}(x)\, dx$$

$$\overset{MCT}{=} \lim_{N\to\infty} \int \sum_{n=1}^{N} f(x) 1\!\!1_{A_n}(x)\, dx$$

$$\overset{lin}{=} \lim_{N} \sum^{N} \int f(x) 1\!\!1_{A_n}(x)\, dx$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{A_n} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)$$

Es gilt $\mathcal{E} = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R} \text{ und } a \le b\} \subseteq \mathcal{F}$, denn

$$\mathbb{P}_F((a,b]) \overset{\text{Def}}{=} F(b) - F(a) \overset{\text{Haupts}}{=} \int_a^b f(x)\,dx$$

und $\mathcal{E}$ erzeugt $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. D.h.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E}) = d(\mathcal{E}) \overset{\text{Mon}}{\subseteq} d(\mathcal{F}) \subseteq d(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$\uparrow$ $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil

$d(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$

Messbarkeit von Funktionen

Definition

Seien $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $f : \Omega \to \Omega'$. Dann heißt f $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$-messbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

für alle $A' \in \mathcal{A}'$ gilt.

- Ist $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}'$, dann ist die Messbarkeit von f äquivalent zu

$$E \in \mathcal{E} \implies f^{-1}(E) \in \mathcal{A}. \quad \text{(Satz 2.1.4.)}$$

- Der obige Satz ist sehr nützlich um die Messbarkeit von Funktionen nachzuweisen.

Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Zusammen haben wir schon gezeigt, dass zum Beispiel die folgenden Mengensysteme Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &:= \{(-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_2 &:= \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_3 &:= \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},\\
\mathcal{E}_4 &:= \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},\\
\mathcal{E}_5 &:= \{(t, \infty) : t \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_6 &:= \{[t, \infty) : t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Mit Satz 2.1.4. müssen wir um die Messbarkeit einer $\mathbb{R}$-wertigen Funktion nachzuweisen, also nur die Urbilder der Mengen in einem dieser Mengensysteme betrachten.

Messbarkeit reellwertiger Funktionen

Wenn $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion von einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist, reicht es also zum Beispiel aus zu zeigen, dass die Menge

$$\{f < t\} := \{\omega \in \Omega : f(\omega) < t\} = f^{-1}((-\infty, t))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ in $\mathcal{A}$ enthalten ist, um folgern zu können, dass f $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$–messbar ist.

$$f^{-1}(A') =: \{f \in A'\}$$

Messbarkeit numerischer Funktionen

Für numerische Funktionen (also $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) funktioniert das analog, da nach der Vorlesung

$$\mathcal{E}_5 := \{[-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{E}_6 := \{[-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

Erzeuger von $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \{B \subseteq \bar{\mathbb{R}} : B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ sind.

Aufgabe 13

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $(f_n, n \in \mathbb{N})$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen mit $f_n \colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ Zeige, dass die Shift-Abbildung

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + a$$

messbar ist.

b) Zeige, dass die für $\omega \in \Omega$ punktweise definierte Funktion

$$g(\omega) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega)$$

messbar ist.

$f_n(\omega) \in \mathbb{R}$

a) Wähle $\mathcal{E} = \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}$. Sei $t \in \mathbb{R}$

$$h^{-1}((-\infty, t]) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \le t\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x + a \le t\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \le t - a\} = (-\infty, t-a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Da es reicht, Messbarkeit auf einem Erz. zu prüfen folgt die Beh.

b) Wähle $\mathcal{E} = \{(-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\}$. Dann gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$\{g < t\} = \{\inf_n f_n < t\}$$

$$= \{\exists n : f_n < t\}$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{f_n < t\}}_{\in \mathcal{A} \text{ nach Ann}} \in \mathcal{A}$$

, da stabil unter Vereinigung

Analog zu (a) folgt die Beh.