Stochastik I

3. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

21.09.2022

Erinnerung: Allgemeine Verteilungsfunktionen

Definition

Eine Funktion

$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \quad x \mapsto F(x),$$

welche die Eigenschaften

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
ii) F ist monoton steigend,
iii) F ist rechtsseitig stetig,
iv) $\lim_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$,

erfüllt heißt Verteilungsfunktion.

- Jede Verteilungsfunktion korrespondiert mit genau einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. (Carathéodory+Vorlesung)

Erinnerung: Verteilungsfunktionen von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Definition

Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann heißt die Funktion

$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \quad x \mapsto \mathbb{P}((-\infty, x])$$

Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$.

- Es gil:

$$\mathbb{P}((a,b]) = F(b) - F(a)$$

für $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Die Normalverteilung

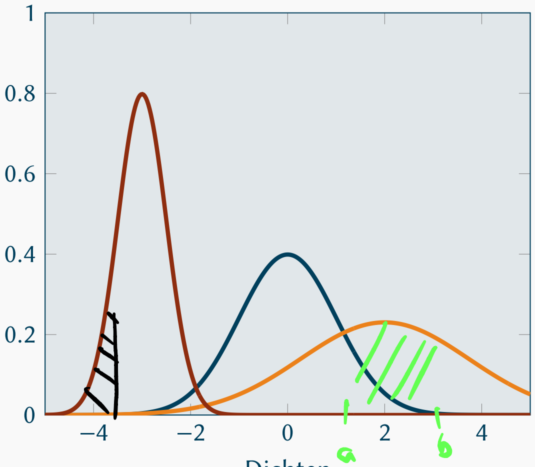
Die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ ist definiert als das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktion

$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \qquad t \mapsto \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x.$$

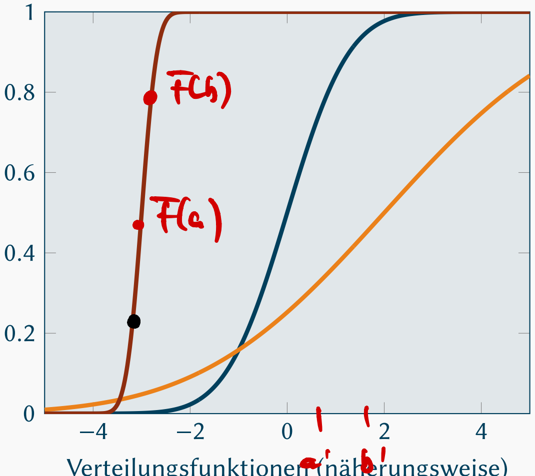
Welchen Einfluss haben die beiden Parameter μ und σ?

- Die Normierungseigenschaft für Wahrscheinlichkeitsmaße wurde in der letzten Übung für $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ gezeigt, der allgemeine Fall folgt per Substitution.

Die Normalverteilung ($\mu = -3$, $\sigma^2 = \frac{1}{4}$ Rot, $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ Blau, $\mu = 2$, $\sigma^2 = 3$ Orange)



Dichten



Verteilungsfunktionen (näherungsweise)

$$P((a,b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Aufgabe 1

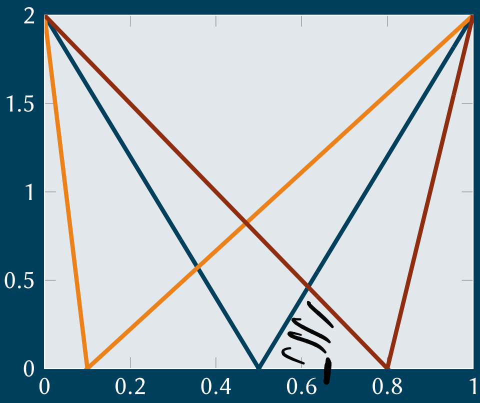
Sei für $c \in (0,1)$ die Dichtefunktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

$$x \mapsto 2\left(1 - \frac{1}{c}x\right)\mathbb{1}_{(0,c]}(x) + 2\left(\frac{1}{1-c}x - \frac{c}{1-c}\right)\mathbb{1}_{(c,1]}(x)$$

gegeben.

Berechne die Verteilungsfunktion von f für $c = \frac{1}{2}$.



$c = 0.1$ Orange, $c = 0.5$ Blau, $c = 0.8$ Rot

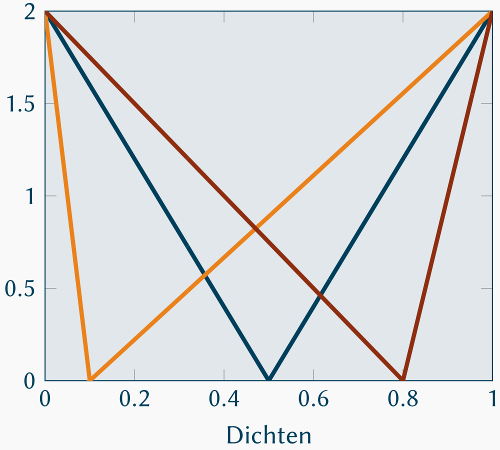
Für $c = \frac{1}{2}$: $f(x) = 2(1-2x)\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(x) + 2(2x-1)\mathbb{1}_{(\frac{1}{2},1]}(x)$

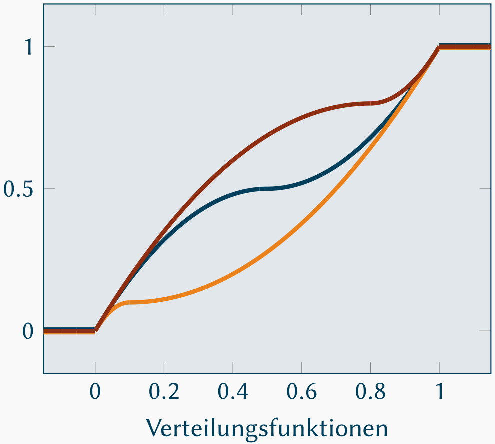
Damit gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} 2(1-2x)\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(x) + 2(2x-1)\mathbb{1}_{(\frac{1}{2},1]}(x)$$

$$= \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \int_0^t 2(1-2x)\,dx = [2x-2x^2]_0^t = 2t-2t^2, & 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \int_{1/2}^t 2(2x-1)\,dx = \frac{1}{2} + [2x^2-2x]_{1/2}^t \\ \quad = \frac{1}{2} + 2t^2 - 2t - \frac{1}{2} + 1 = 2t^2-2t+1, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

Dichten vs. Verteilungsfunktionen ($c = 0.1$ Orange, $c = 0.5$ Blau, $c = 0.8$ Rot)





Erinnerung: Messbarkeit von Funktionen

Definition

Seien $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $f: \Omega \to \Omega'$. Dann heißt f $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$-messbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

für alle $A' \in \mathcal{A}'$ gilt.

- Ist $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}'$, dann ist die Messbarkeit von f äquivalent zu

$$E \in \mathcal{E} \implies f^{-1}(E) \in \mathcal{A}. \quad \text{(Satz 2.1.4.)}$$

- Der obige Satz ist sehr nützlich um die Messbarkeit von Funktionen nachzuweisen.

Erinnerung: Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Zusammen haben wir schon gezeigt, dass zum Beispiel die folgenden Mengensysteme Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &:= \{(-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_2 &:= \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_3 &:= \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},\\
\mathcal{E}_4 &:= \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},\\
\mathcal{E}_5 &:= \{(t, \infty) : t \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_6 &:= \{[t, \infty) : t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

Mit Satz 2.1.4. müssen wir um die Messbarkeit einer $\mathbb{R}$-wertigen Funktion nachzuweisen, also nur die Urbilder der Mengen in einem dieser Mengensysteme betrachten.

Messbarkeit reellwertiger Funktionen

Wenn $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion von einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist, reicht es also zum Beispiel aus zu zeigen, dass die Menge

$$\{f < t\} := \{\omega \in \Omega : f(\omega) < t\} = f^{-1}((-\infty, t))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ in $\mathcal{A}$ enthalten ist, um folgern zu können, dass f $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$–messbar ist.

Messbarkeit numerischer Funktionen

Für numerische Funktionen (also $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) funktioniert das analog, da nach der Vorlesung

$$\mathcal{E}_5 := \{[-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{E}_6 := \{[-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

Erzeuger von $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \{B \subseteq \bar{\mathbb{R}} : B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ sind.

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $(f_n, n \in \mathbb{N})$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen mit $f_n \colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass die für $\omega \in \Omega$ punktweise definierte Funktionen

$$g(\omega) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega)$$

messbar ist.

wähle den Erzeuger $\{(-\infty,t) : t \in \mathbb{Q}\}$

Sei also $t \in \mathbb{R}$

$$\{g<t\} \quad (= \{\omega \in \Omega : g(\omega) < t\})$$

$$= \{\inf_{n\geq 1} f_n < t\}$$

$$= \{\omega \in \Omega : \exists n \in \mathbb{N} : f_n(\omega) < t\}$$

$$= \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) < t\}}_{\in \mathcal{A}\text{, da } f_n \text{ messbar}}}_{\in \mathcal{A}\text{, da } \mathcal{A}\ \sigma\text{-Alg.}} \in \mathcal{A}$$

Da es reicht, Messbarkeit auf einem Erzeuger nachzuweisen, sind wir fertig.