Stochastik I

Mail: fschamon@mail.uni-mannheim.de

2. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

14.09.22

Maß

Definition

Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt $\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ ein **Maß auf** $\mathcal{A}$, falls folgende Eigenschaften gelten:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkte Mengen, so gilt $\mu(\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Wir nennen diese Eigenschaft σ-Additivität.

Ein Maß μ heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$. μ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls $\mu(\Omega) = 1$.

Aufgabe 1

a) Sei μ ein endliches (und nicht triviales) Maß auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeige, dass für ein $\cancel{c \in \mathbb{R}}$ $c \geq 0$ auch $\widetilde{\mu} := c \cdot \mu$ ein endliches Maß ist. Wie muss c gewählt werden, damit $\widetilde{\mu}$ ein W-Maß ist?

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Betrachte das Maß

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty), \quad A \mapsto \sum_{k=1}^{n} \delta_k(A)\, k$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Wie muss c hier gewählt werden, damit das Maß $\widetilde{\mu} := c \cdot \mu$ ein W-Maß ist?

a) Sei $c \geq 0$. Überprüfe Eigenschaften

(0) Für $A \in \mathcal{A}$ gilt $\tilde{\mu}(A) \overset{\text{Def.}}{=} c \cdot \mu(A) \geq 0$, da $c \geq 0$ & μ ist Maß

(1) $\tilde{\mu}(\emptyset) \overset{\text{Def.}}{=} c \cdot \mu(\emptyset) \overset{\mu \text{ Maß}}{=} c \cdot 0 = 0$

(2) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ pw disjunkt

$$\tilde{\mu}\Big(\dot{\bigcup_{n \geq 1}} A_n\Big) \overset{\text{Def}}{=} c \cdot \mu\Big(\dot{\bigcup_{n \geq 1}} A_n\Big) \overset{\mu \text{ Maß}}{=} c \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

$$\overset{\text{alle Summanden} \geq 0}{=} \sum_{n \geq 1} c \cdot \mu(A_n) \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mu}(A_n) \quad \square$$

$\tilde{\mu}$ ist endlich, denn $\tilde{\mu}(\Omega) \overset{\text{Def.}}{=} c \cdot \mu(\Omega) < \infty$

Damit $\tilde{\mu}$ ein W-Maß ist, muss gelten

$$1 \overset{!}{=} \tilde{\mu}(\Omega) \overset{\text{Def.}}{=} c \cdot \mu(\Omega) \iff c = \frac{1}{\mu(\Omega)}$$

b) Mit a) folgt, dass für die Wahl $c = \frac{1}{\mu(N)}$ ist, $\tilde{\mu}$ ein W-Maß.

$$\mu(N) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\delta_k(N)}_{=1} \cdot k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow c = \frac{2}{n(n+1)}$$

Die Borelsche σ-Algebra

Definition (Erzeugte σ-Algebra)

Für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}, \mathcal{B}\ \sigma-\text{Alg.}} \mathcal{B}$$

die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra. $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. Falls $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$, so nennen wir $\mathcal{E}$ Erzeuger von $\mathcal{A}$.

Definition (Borelsche σ-Algebra)

Sei die Grundmenge $\Omega = \mathbb{R}$ gegeben und $\mathcal{O}$ die Menge aller offenen Teilmengen von Ω. Dann heißt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{O})$$

die Borelsche σ-Algebra der reellen Zahlen.

- Die Borelsche σ-Algebra ist also die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthält.
- Die Borelsche σ-Algebra hat aber noch viele weitere Erzeuger.

Wie zeigt man Gleichheit von erzeugten σ-Algebren?

Seien 2 Mengensystem $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ gegeben. Wir wollen $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$ zeigen. Dazu nutzen wir folgende Eigenschaften:

- Für Mengensysteme $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ gilt $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$, (1)
- $\sigma(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$. (2)

Beide Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition der erzeugten σ-Algebra. Nun zeigen wir

(i) • $\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$ und

(ii) • $\mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Somit folgt aus den oberen Eigenschaften $\sigma(\mathcal{E}_1) \overset{(i)+(1)}{\subseteq} \sigma(\sigma(\mathcal{E}_2)) \underset{(2)}{=} \sigma(\mathcal{E}_2)$ und analog auch $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Aufgabe 2

Zeige, dass die folgenden Mengensysteme Erzeuger der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind:

$$\mathcal{E}_1 := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ abgeschlossen}\},$$
$$\mathcal{E}_2 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}.$$

Ihr dürft verwenden, dass $\mathcal{E} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugt.

• Zuerst zeige $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{O}) \overset{\text{Def.}}{=} \mathcal{B}(\mathcal{O})$

Mit Trick: $\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{O})$ sowie $\mathcal{O} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$

Sei also $A \in \mathcal{E}_1$, d.h. A ist abgeschlossen. Dann ist A^c offen, d.h. $A^c \in \sigma(\mathcal{O})$. Also ist auch $(A^c)^c = A \in \sigma(\mathcal{O})$, da $\sigma(\mathcal{O})$ σ-Alg. ist.

Sei $E \in \mathcal{O}$, dann ist E^c abgeschlossen und insb. $E^c \in \sigma(\mathcal{E}_1)$ und mit Eig (ii) einer σ-Alg auch

$E = (E^c)^c \in \sigma(\mathcal{E}_1)$

- Nun $\sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_1) \overset{\text{Tipp}}{=} \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Sei also $[a,b] \in \mathcal{E}_2$. Es gilt

$$[a,b] = \underbrace{\bigcap_{n \geq 1} \underbrace{(a-\tfrac{1}{n}, b+\tfrac{1}{n})}_{\in \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})}}_{\in \sigma(\mathcal{E}) \text{, da } \sigma\text{-Alg}} \in \sigma(\mathcal{E})$$

$\mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$

$+ \quad \mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$

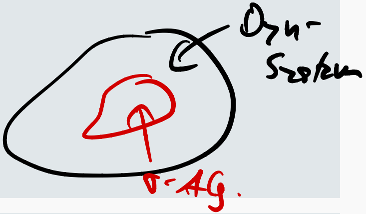
$\Uparrow \qquad \Rightarrow$ Gleichheit der erz. σ-Alg.

Ebenso $(a,b) = \bigcup_{n \geq 1} \underbrace{[a+\tfrac{1}{n}, b-\tfrac{1}{n}]}_{\in \mathcal{E}_1} \in \sigma(\mathcal{E}_1)$, da $\cup$-stabil

Dynkin-Systeme vs. σ-Algebren

Definition (Dynkin-System)

Sei Ω eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{D}$ heißt Dynkin-System (über Ω), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:



(i) $\Omega \in \mathcal{D}$,

(ii) $A \in \mathcal{D} \implies A^C \in \mathcal{D}$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt $\implies \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

Definition (σ-Algebra)

Sei Ω eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ heißt σ-Algebra (über Ω), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^C \in \mathcal{A}$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl und

$$\mathcal{D} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \#(A \cap \{1, \dots, n\}) \text{ gerade oder } 0\}.$$

a) Zeige, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System (über $\mathbb{N}$) ist.

b) Ist $\mathcal{D}$ auch eine σ-Algebra (über $\mathbb{N}$)?

a) Überprüfe Eigenschaften

(1) $\mathbb{N} \in \mathcal{D}$, denn $\#(\mathbb{N} \cap \{1,..,n\}) = \#\{1,...,n\} = n$ gerade nach VSS

(2) Sei $A \in \mathcal{D}$. z.z. $A^c \in \mathcal{D}$, d.h. $\#(A^c \cap \{1,..,n\})$ gerade oder $\emptyset$.

$A \cup A^c = \mathbb{N}$

$$\#(A^c \cap \{1,..,n\}) = n - \underbrace{\#(A \cap \{1,...,n\})}_{\text{gerade, da } A \in \mathcal{D}} \quad \text{gerade oder } \emptyset$$

3) Seien $A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{N}$ pw. disjunkt.

Dann haben höchstens n Mengen einen nichtleeren Schnitt mit $\{1, \ldots, n\}$. Sei diese Anzahl gegeben durch $0 \leq m \leq n$. OE die ersten m viele.

Dann

$$\#\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k \cap \{1, \ldots, n\}\right) \overset{\text{s.o.}}{=} \#\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{m}} A_k \cap \{1, \ldots, n\}\right)$$

$$\overset{\text{disjunkt}}{=} \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\#(A_k \cap \{1, \ldots, n\})}_{\text{gerade oder } 0} \quad \text{gerade oder } 0,$$

d.h. $\dot{\bigcup} A_k \in D$

$\mathcal{D}$ ist keine σ-Alg., denn z.B. gilt für $n=4$

$\{1,2\} \in \mathcal{D}$ & $\{2,3\} \in \mathcal{D}$

Aber $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\} \notin \mathcal{D}$, denn

$\#(\{2\} \cap \{1,\dots,k\}) = 1$ ungerade

Also ist $\mathcal{D}$ nicht $\cap$-stabil und mit

Hauptsatz für D-S folgt: $\mathcal{D}$ ist keine σ-Alg.