Stochastik I

Repetitorium

Felix Schamoni

03.01.23

Kapitel 1: Maßtheorie

σ-Algebra

Definition

Sei Ω nicht leer. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra, falls

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$, das nennt man auch stabil (oder abgeschlossen) unter Komplementbildung,
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, das nennt man auch stabil (oder abgeschlossen) unter abzählbarer Vereinigung.

Elemente von $\mathcal{A}$ heißen **messbare Mengen**. Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind σ-Algebren, so nennt man $\mathcal{A}$ Unter-σ-Algebra von $\mathcal{B}$.

Maß

Definition

Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt $\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ ein **Maß auf** $\mathcal{A}$, falls folgende Eigenschaften gelten:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkte Mengen, so gilt $\mu(\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Wir nennen diese Eigenschaft σ-Additivität.

Ein Maß μ heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$. μ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls $\mu(\Omega) = 1$.

Stetigkeit von Maßen

Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Mengen, so gelten:

i) *Aus $A_n \uparrow A$ (d. h. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$) folgt* $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

ii) *Aus μ endlich und $A_n \downarrow A$ (d. h. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$) folgt* $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

Erzeugte σ-Algebra

Definition

Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, so existiert genau eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit

i) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$

ii) Ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}$ ist eine σ-Algebra, so gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Dabei bedeutet ii), dass $\mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{E}$ enthält.
Für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}, \\ \mathcal{B}\ \sigma\text{-Alg.}}} \mathcal{B}$$

die von $\mathcal{E}$ **erzeugte σ-Algebra**. Ist $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$, so nennt man $\mathcal{E}$ einen Erzeuger von $\mathcal{A}$.

Dynkin-System

Definition

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Dynkin-System**, falls

i) $\Omega \in \mathcal{D}$,

ii) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^C \in \mathcal{D}$,

iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Im Gegensatz zu $\sigma-$Algebren fordern wir nur Abgeschlossenheit bezüglich disjunkter Vereinigungen!

Hauptsatz

Satz

Ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ $\cap$-stabil, so gilt $d(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

Hauptsatz

Satz

Ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ $\cap$-stabil, so gilt $d(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

- Für einen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und zwei (endliche) Maße μ_1, μ_2 ist das insbesondere wichtig für die Menge
$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$$
die ein Dynkin-System ist, falls wir zusätzlich $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$ fordern.
- Finden wir Gleichheit der Maße auf einem $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathcal{A}$ so wissen wir, dass Gleichheit auf ganz $\mathcal{A}$ gilt.

Eindeutigkeitssatz

Satz

Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$ und μ_1, μ_2 seien Maße auf $\mathcal{A}$. Zudem gelten:

i) *Es gibt eine Folge $(E_n) \subseteq \mathcal{E}$ mit $E_n \uparrow \Omega$, $n \to \infty$, und $\mu_i(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$.*

ii) *$\mu_1(A) = \mu_2(A)$ für alle $A \in \mathcal{E}$.*

Dann gilt $\mu_1 = \mu_2$, d. h. $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Wichtig: Für i) muss die Folge in dem Erzeuger $\mathcal{E}$ enthalten sein. Es reicht also nicht, dass die Maße μ_1 und μ_2 $\sigma-$endlich ist.

Nachdem wir nun die Eindeutigkeit von Maßen gezeigt haben, kommen wir nun zur Existenz oder Konstruktion von Maßen.

Semiring

Definition

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Semiring**, falls

i) $\emptyset \in \mathcal{S}$,

ii) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$, also ist $\mathcal{S}$ $\cap$-stabil,

iii) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow$ es gibt paarweise disjunkte Mengen $C_1, ..., C_m \in \mathcal{S}$ mit $A \setminus B = \dot{\bigcup}_{k=1}^{m} C_k$.

Äußeres Maß

Definition

Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ heißt **äußeres Maß**, falls

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

ii) $A \subseteq B \subseteq \Omega \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

iii) $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

Eine Menge $A \subseteq \Omega$ heißt μ^*-messbar, falls für alle $Z \subseteq \Omega$ gilt $\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap A^C)$.
Die Menge der μ^*-messbaren Mengen nennen wir $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

Satz

i) *$\mathcal{A}_{\mu^*}$ ist eine $\sigma-$Algebra.*

ii) *μ^* eingeschränkt auf $\mathcal{A}_{\mu^*}$ ist ein Maß.*

Fortsetzungssatz von Carathéodory

Satz

Sei $\mathcal{S}$ ein Semiring und $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,\infty]$ eine Mengenfunktion mit

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- μ *ist* σ-**additiv** *(d.h. sind $A_1, A_2, \ldots \in S$ paarweise disjunkt mit $A := \dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$, so gilt $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$).*

Dann existiert ein Maß $\bar{\mu}$ auf $\sigma(\mathcal{S})$ mit $\mu(A) = \bar{\mu}(A)$ für alle $A \in \mathcal{S}$.

Beweisskizze

Für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ definieren wir

$$\mu^*(A) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S} \text{ mit } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\}.$$

Der Beweis lässt sich nun in 3 Schritte einteilen:

a) μ^* ist ein äußeres Maß.

b) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$.

c) $\mu(A) = \mu^*(A)$ für alle $A \in \mathcal{S}$.

Existenz und Eindeutigkeit von Maßen

Satz

Ist $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mathcal{E}$ ein Semiring mit $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Sei $\mu \colon \mathcal{E} \to [0, \infty]$ mit

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *μ ist σ-additiv*
- *es gibt Folge $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{E}$ mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Dann existiert genau ein Maß $\bar{\mu}$ auf $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$, sodass $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{E}$.

Das Beispiel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Zur Erinnerung: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\{O \subseteq \mathbb{R} : \text{O offen}\}) = \sigma(\{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\})$.

Definition

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Verteilungsfunktion, d.h.

i) $0 \leq F(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$,

ii) F ist nicht fallend,

iii) F ist rechtsstetig, d.h. $\lim_{s \downarrow t} F(s) = F(t)$,

iv) $\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$ und $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$.

Unser Ziel ist es nun mithilfe dieser Verteilungsfunktion ein Maß $\mathbb{P}_F$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ zu konstruieren, das $\mathbb{P}_F((-\infty, t]) = F(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Konstruktion auf Intervallen (Quader)

Wir wählen den Semiring $\mathcal{S} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ mit $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und definieren $\mu : \mathcal{S} \to [0, 1]$ als

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Diese Mengenfunktion auf $\mathcal{S}$ erfüllt die Voraussetzungen von Carathédory und lässt sich daher zu einem Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ fortsetzen. Dieses Maß nennen wir $\mathbb{P}_F$. Weil die Mengenfolge mit $E_n := (-n, n]$ sowohl $E_n \uparrow \mathbb{R}$ als auch $\mu(E_n) < \infty$ erfüllt, ist dieses Maß eindeutig. Der gewünschte Zusammenhang $\mathbb{P}_F((-\infty, t]) = F(t)$ folgt aus der Stetigkeit von Maßen.

Aufgabenblock 1

a) Sei μ ein Maß und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Zeige, dass für beliebige $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

gilt.

b) Zeige, dass der Schnitt zweier Dynkin-Systeme $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ wieder ein Dynkin-System ist. Gilt das auch für die Vereinigung?

c) Zeige, dass für beliebiges $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

$$d(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(d(\mathcal{E}))$$

gilt.

Lösung Aufgabenblock 1

a) Per Induktion. Für $n = 1$ gilt die Behauptung offensichtlich.
IA: Sei $n = 2$. Dann gilt mit σ–Additivität und da $\mu \geq 0$

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

IV: Die Behauptung gelte für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$
IS: Definiere $A := \cup_{k=1}^{n} A_k$. Mit dem gleichem Argument wie für $n = 2$ folgt

$$\mu(A \cup A_{n+1}) \leq \mu(A) + \mu(A_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k)$$

Lösung Aufgabenblock 1

b) Definition checken:

i) Da $\Omega \in \mathcal{D}_1$ und $\Omega \in \mathcal{D}_2$ folgt $\Omega \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$

ii) Sei $A \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$. Dann muss auch $A \in \mathcal{D}_1$ und $A \in \mathcal{D}_2$ gelten. Da $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ Dynkin-Systeme sind, ist $A^c \in \mathcal{D}_1$ und $A^c \in \mathcal{D}_2$. Damit ist auch $A^c \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$

iii) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ paarweise disjunkt. Dann sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}_1$ und $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}_2$. Damit ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}_1$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}_2$. Damit folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.

Lösung Aufgabenblock 1

Für die Vereinigung gilt das nicht, mit Gegenbeispiel: Sei $\Omega = \{a, b, c\}$.

$$\mathcal{D}_1 := \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$$

$$\mathcal{D}_2 := \{\Omega, \emptyset, \{b\}, \{a, c\}\}$$

sind beides Dynkin-Systeme, aber

$$\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$

ist kein Dynkin-System, da $\{a, b\} \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$.

Lösung Aufgabenblock 1

c) Da jede σ-Algebra ein Dynkin-Sytem ist, gilt $d(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(\mathcal{E})$. Mit der Monotonie von d folgt

$$\mathcal{E} \subseteq d(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}).$$

Mit der Monotonie Eigenschaft und Idempotenz von σ folgt dann

$$\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(d(\mathcal{E})) \subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(\mathcal{E}) = d(\sigma(\mathcal{E})).$$

Kapitel 2: Abbildungen zwischen messbaren Räumen

Messbarkeit von Funktionen

Definition

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $f\colon \Omega \to \Omega'$. Dann heißt f $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$-messbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

für alle $A' \in \mathcal{A}'$ gilt.

Messbarkeit von Funktionen

Definition

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $f\colon \Omega \to \Omega'$. Dann heißt f $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$-messbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

für alle $A' \in \mathcal{A}'$ gilt.

Satz

Ist $\mathcal{E}'$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}'$ und $f\colon \Omega \to \Omega'$. Dann ist die Messbarkeit von f äquivalent zu

$$A' \in \mathcal{E}' \implies f^{-1}(A') \in \mathcal{A}.$$

- Der obige Satz ist sehr nützlich um die Messbarkeit von Funktionen nachzuweisen.

Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Die folgenden Mengensysteme sind zum Beispiel Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{E}_1 := \{(-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{E}_2 := \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{E}_3 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$$
$$\mathcal{E}_4 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$$
$$\mathcal{E}_5 := \{(t, \infty) : t \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{E}_6 := \{[t, \infty) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Mit Satz 2.1.4. müssen wir um die Messbarkeit einer $\mathbb{R}$-wertigen Funktion nachzuweisen, also nur die Urbilder der Mengen in einem dieser Mengensysteme betrachten.

$\sigma(f)$

Definition

Sei $f : \Omega \to \Omega'$ für einen messbaren Raum $(\Omega', \mathcal{A}')$. Dann ist

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$$

eine σ-Algebra und $\mathcal{A}$ ist die kleinste σ-Algebra auf Ω, für die f $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar ist. Wir nennen die σ-Algebra auch $\sigma(f)$.

Bildmaß oder push-forward

Definition

Sei $f\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ messbar und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann ist

$$\mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B)), B \in \mathcal{A}'$$

ein Maß auf $\mathcal{A}'$. Dieses Maß heist Bildmaß oder push-forward.

- Wir nutzen also die Messbarkeit der Abbildung f, um ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ auf ein Maß μ_f auf $\mathcal{A}'$ rüberzuschieben.
- Wer sich an die Definition der Verteilung von Zufallsvariablen erinnert, hat jetzt hoffentlich nochmal den AHA-Effekt bekommen.

Messbare numerische Funktionen

Definition

Für einen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ messbare numerische Funktion, falls $f(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-messbar ist.

Satz

Sind $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ Funktionen von einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$, so sind die Mengen

$$\{f < g\},\ \{f \leq g\},\ \{f = g\}, \{f \neq g\}$$

bzw. Funktionen

$$f + g,\ \alpha \cdot f \text{ für } \alpha \in \mathbb{R},\ f \cdot g,\ f \wedge g,\ f \vee g,\ |f|,\ f^+,\ f^-$$

alle messbar.

Folgen messbarer numerischer Funktionen

Satz

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen mit $f_n\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die für $\omega \in \Omega$ punktweise definierten Funktionen

$$g_1(\omega) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega), \quad g_2(\omega) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega),$$
$$g_3(\omega) := \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega), \quad g_4(\omega) := \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega),$$

messbar. Falls für jedes $\omega \in \Omega$ der Grenzwert

$$g(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$$

in $\bar{\mathbb{R}}$ existiert, ist auch g eine messbare numerische Funktion .

$\Rightarrow$ Message: Gefühlt alles ist messbar!

Aufgabenblock 2

a) Zeige: Jede stetige Abbidung ist $(\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}), \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-messbar.

b) Zeige: Ist $h : \Omega \to \Omega'$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar und $k : \Omega' \to \Omega''$ $(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')$-messbar, so ist $k \circ h : \Omega \to \Omega''$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}'')$-messbar.

c) Zeige: Sind $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar, so ist $\{f < g\}$ messbar.

Lösung Aufgabenblock 2

a) Mit Proposition 2.1.4 reicht es, die Messbarkeit auf einem Erzeuger nachzuweisen. Wir wählen $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{O : O \subseteq \mathbb{R} \text{ offen }\})$. Nun ist die Definition der Stetigkeit nach Ana 1 aber äquivalent zu Urbilder offener Mengen sind offen. Damit ist die Aussage gezeigt.

b) Weil k $(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')$-messbar ist, gilt $k^{-1}(A'') \in \mathcal{A}' \quad \forall A'' \in \mathcal{A}''$.
Weil h $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar ist, gilt $h^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall \mathcal{B} \in \mathcal{A}'$.
Also folgt für alle $A'' \in \mathcal{A}''$

$$(k \circ h)^{-1}(A'') = h^{-1}(k^{-1}(A'')) \in \mathcal{A}$$

und somit die Behauptung.

Lösung Aufgabenblock 2

c)

$$\{f < g\} = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} \{f < t < g\} = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} \{f < t\} \cap \{t < g\}.$$

Die erste Gleichheit gilt, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt.

Die Behauptung folgt, da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist und f, g messbar nach Voraussetzung, also ist die rechte Seite in $\mathcal{A}$ und damit auch die Linke.

Kapitel 3: Integrationstheorie

Die Gebetsmühle der Integrationstheorie

- Wir leiten zuerst das Lebesgue-Integral für einfache Funktionen her.
- Für nichtnegative, messbare Funktionen führen wir das Lebesgue-Integral über die Supremumsdarstellung ein.
- Nützlich: Durch den Satz der monotonen Konvergenz einfacher Funktionen können wir das Integral einer nichtnegativen, messbaren Funktion f auch als Grenzwert einer Folge von Integralen von $f_n \in \mathcal{E}^+$ schreiben, sofern $f_n \uparrow f$ gilt.
- Über die Zerlegung $f = f^+ - f^-$ kommen wir dann im letzten Schritt zum Lebesgue-Integral für numerische, messbare Funktionen.

Das Lebesgue-Integral: Einfache Funktionen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{E} := \{f : f \text{ einfache Funktion}\}$ bzw.
$\mathcal{E}^+ := \{f : f \text{ einfache positive Funktion}\}$. Hierbei heißt eine Funktion einfach, falls $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \bar{\mathbb{R}}$ und $A_1, \ldots, A_n$ existieren, sodass die A_k paarweise disjunkt sind mit $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$ und

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Für ein $f \in \mathcal{E}^+$ ist dann das Lebesgue-Integral definiert durch

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k).$$

Das Lebesgue-Integral: Nichtnegative, messbare Funktionen

Für eine nichtnegative, messbare Funktion $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ definieren wir dann (etwas unhandlich, dafür aber direkt wohldefiniert) das Lebesgue-Integral durch

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu : g \text{ einfach}, 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Der folgende Satz vereinfacht weitere Beweise durch eine äquivalente Schreibweise.

Satz (Monotone Konvergenz für einfache Funktionen)

Sei $(f_n) \subseteq \mathcal{E}^+$ mit $f_n \uparrow f$, $n \to \infty$, für eine nichtnegative messbare numerische Funktion f. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu,$$

wobei in der Gleichheit $+\infty = +\infty$ möglich ist.

Dies ist besonders nützlich, da nach 3.1.6 für jede für eine nichtnegative messbare numerische Funktion eine solche Folge in $\mathcal{E}^+$ existiert.

Approximation nach 3.1.6

Eine approximierende Folge von $f \geq 0$ durch einfache Funktionen ist nämlich gegeben durch

$$f_n = \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)} + n \, \mathbf{1}_{f^{-1}([n,\infty))}.$$

Man kann sehr gut erkennen, dass der Bildbereich in kleine Intervalle zerlegt wird (Unterschied zum Riemann-Integral, wo der Urbildbereich zerteilt wird). Da wir das Lebesgue-Integral für allgemeine Maßräume definieren wollen, bleibt uns aber auch gar nichts anderes übrig!

Das Lebesgue-Integral: Integrierbare Funktionen

Sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ eine messbare numerische Funktion. Dann sind nach der Vorlesung $f^+ := \max\{f, 0\}, f^- := -\min\{f, 0\}$ messbare und nichtnegative Funktionen. Falls

$$\int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu < \infty, \quad \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$

gilt, heißt f integrierbar und das Lebesgue-Integral für eine integrierbare Funktion f ist definiert durch

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

Wir schränken uns hierbei auf integrierbare Funktionen ein, um den Fall "$\infty - \infty$" zu vermeiden. Für die Wohldefniertheit des Integrals reicht auch

$$\int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{oder} \quad \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Satz

Seien $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar und $A \in \mathcal{A}$. Falls die Integrale wohldefiniert sind, gelten folgende Eigenschaften:

i) $\int_A f \, d\mu := \int_\Omega f \mathbf{1}_A \, d\mu$.

ii) $\int_\Omega \alpha f \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu$ *für* $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii) $\int_\Omega f + g \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu$.

iv) $f \leq g \Rightarrow \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$.

v) $|\int_\Omega f \, d\mu| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu$.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Integralen ist die Invarianz unter Nullmengen, d.h. für $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ gilt

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f \mathbf{1}_{N^C} \, d\mu.$$

Transformationssatz

Satz (Abstrakter Transformationssatz)

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, μ ein Maß auf $\mathcal{A}$, $f\colon \Omega \to \Omega'$ messbar, $g\colon \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist g μ_f-integrierbar genau dann, wenn $g \circ f$ μ-integrierbar ist. Ist eine dieser Aussagen erfüllt, so gilt ebenfalls die Transformationsformel

$$\int_{\Omega'} g \, \mathrm{d}\mu_f = \int_{\Omega} g \circ f \, \mathrm{d}\mu.$$

Konvergenzsätze

Satz (Monotone Konvergenz Theorem (MCT))

Seien $f, f_1, f_2, \ldots \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar und es gelte* $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f$ *sowie* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ*-f.ü. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu,$$

$+\infty = +\infty$ *ist dabei möglich.*

Konvergenzsätze

Satz (Monotone Konvergenz Theorem (MCT))

Seien $f, f_1, f_2, \ldots \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und es gelte $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f$ sowie $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-f.ü. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \mathrm{d}\mu,$$

$+\infty = +\infty$ ist dabei möglich.

Satz (Dominierte Konvergenz Theorem (DCT))

Seien $f, f_1, f_2, \ldots \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-fast überall und $|f_n| \leq g$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, für eine beliebige μ-integrierbare nichtnegative messbare numerische Funktion g.
Dann sind $f, f_1, f_2, \ldots$ μ-integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \mathrm{d}\mu.$$

Die Funktion g spielt keine große Rolle (sie muss nur existieren) und wird Majorante für die Folge (f_n) genannt.

Integralabschätzungen

Satz (Hölder-Ungleichung)

Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\int_\Omega |f \cdot g| \mathrm{d}\mu \leq \Big(\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega |g|^q \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Integralabschätzungen

Satz (Hölder-Ungleichung)

Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\int_\Omega |f \cdot g| \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Satz (Minkowski-Ungleichung)

Sei $p \geq 1$, so gilt

$$\left(\int_\Omega |f + g|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

Beide Seiten können den Wert $+\infty$ annehmen.

$\mathcal{L}^p$-Räume

Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt p-fach integrierbar, falls $\int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty$. Wir definieren

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} \text{ messbar } : \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$

Dies ist ein Vektorraum, auf dem wir die folgende Halbnorm konstruieren können:

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Durch bilden von Äquivalenzklassen bekommen wir sogar einen *normierten Raum*.
Die obige (Halb-)Norm wird uns auch nochmal bei der Konvergenz im p-ten Mittel von Zufallsvariablen begegnen.

Produktmaße und Fubini

Satz (Existenz des Produktmaßes)

Sind μ_1, μ_2 σ-endliche Maße auf $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, so existiert ein eindeutiges Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

für alle Mengen $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Produktmaße und Fubini

Satz (Existenz des Produktmaßes)

Sind μ_1, μ_2 σ-endliche Maße auf $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, so existiert ein eindeutiges Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

für alle Mengen $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Satz (Satz von Fubini)

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume und $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ sei $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-messbar. Dann gilt (u.a.)

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \,\mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2 &= \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1}(\omega_2) \mathrm{d}\mu_2(\omega_2) \Big) \mathrm{d}\mu_1(\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \Big(\int_{\Omega_1} f_{\omega_2}(\omega_1) \mathrm{d}\mu_1(\omega_1) \Big) \mathrm{d}\mu_2(\omega_2)\end{aligned}$$

Aufgabenblock 3

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein W-Raum, $\alpha > 0$ beliebig und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung. Zeige die (skalare) Linearität des Integrals, d.h.

$$\int_\Omega \alpha f \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu, \quad \text{(falls wohldefiniert)}.$$

b) Sei $x_0 \in \Omega$ beliebig und betrachte das Diracmaß in x_0, also $\mu = \delta_{x_0}$. Zeige

$$\int_\Omega f \, d\mu = f(x_0).$$

c) Sei X eine nichtnegative Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $X \sim F$. Zeige, dass

$$\int_0^\infty (1 - F(t)) \mathrm{d}t = \mathbb{E}[X]$$

gilt. *Hinweis: Es gilt* $\mathbb{P}(X \leq t) = F(t)$ *und* $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A]$ *für* $A \in \mathcal{A}$.

Lösung Aufgabenblock 3

a) Mit Gebetsmühle. Sei $\alpha > 0$ und $f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und $A_k \in \mathcal{A}$, $\bigcup_k A_k = \Omega$. Dann ist

$$\alpha f(\omega) = \alpha \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha\alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$$

wieder eine einfache Funktion und nach Definition + Linearität gilt

$$\int_\Omega \alpha f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha\alpha_k \mu(A_k) = \alpha \int_\Omega f \, d\mu.$$

Für eine nichtnegative, messbare Funktion f existiert eine wachsende Folge von nichtnegativen, einfachen Funktion f_n mit $f_n \uparrow f$. Mit MCT folgt

$$\int_\Omega \alpha f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \alpha f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \alpha \int_\Omega f_n \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu.$$

Für eine messbare Funktion f mit existierenden Integral (oder wohldefinierten Integral) folgt die Behauptung nun durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil. Zuerst gilt $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ (da $\alpha > 0$) und daher

$$\int_\Omega (\alpha f)^+ \, d\mu = \alpha \int_\Omega f^+ \, d\mu < \infty$$

und analog für $(\alpha f)^-$. Also ist αf integrierbar mit

$$\int_\Omega \alpha f \, d\mu = \int_\Omega \alpha f^+ \, d\mu - \int_\Omega \alpha f^- \, d\mu = \alpha \left(\int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu \right) = \alpha \int_\Omega f \, d\mu.$$

b) Sei $x_0 \in \Omega$ beliebig und $f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und $A_k \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, $\dot{\bigcup}_k A_k = \Omega$. Dann existiert genau ein $k_0 \in \{1, \dots, n\}$, sodass $x_0 \in A_{k_0}$ und $f(x_0) = \alpha_{k_0}$. Es gilt wegen Definition des Dirac-Maßes

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f \, d\delta_{x_0} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{x_0}(A_k) = \alpha_{k_0} = f(x_0).$$

Für eine nichtnegative, messbare Funktion f existiert eine wachsende Folge von nichtnegativen, einfachen Funktion f_n mit $f_n \uparrow f$. Mit MCT folgt

$$\int_\Omega f \, d\delta_{x_0} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\delta_{x_0} = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Für f integrierbar gilt wieder

$$\int_\Omega f \, d\delta_{x_0} = \int_\Omega f^+ \, d\delta_{x_0} - \int_\Omega f^- \, d\delta_{x_0} = f^+(x_0) - f^-(x_0) = f(x_0).$$

c) Nutze den Trick $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(X)]$ und schreibe den Erwartungswert als Integral, um Fubini zu nutzen:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (1 - F(t))\mathrm{d}t &= \int_0^\infty (1 - \mathbb{P}(X \leq t))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}[\mathbf{1}_{(t,\infty)}(X)]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \int_\Omega \mathbf{1}_{(t,\infty)}(X(\omega))\ \mathrm{d}\mathbb{P}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \int_\Omega \mathbf{1}_{[0,X(\omega))}(t)\ \mathrm{d}\mathbb{P}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_\Omega \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,X(\omega))}(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\mathbb{P}
\end{aligned}$$

$$= \int_\Omega \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,X(\omega))}(t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\mathbb{P}$$
$$= \mathbb{E}\left[\int_0^X 1\, \mathrm{d}t\right] = \mathbb{E}[X]$$

Bleibt noch zu zeigen, dass wir Fubini benutzen können. Dafür müssen wir zeigen, dass die Abbildung

$$(\omega, t) \mapsto \mathbf{1}_{[0,X(\omega))}(t)$$

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist. Für Indikatorfunktionen reicht es aus die Messbarkeit der Indikatormenge zu zeigen. Dafür verweisen wir auf die Lösung von Aufgabe 1 auf Übungsblatt 10.

Ende 1. Teil

Kapitel 4: Stochastik (endlich)

Verteilungsfunktionen

Definition

Eine Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Verteilungsfunktion falls

i) $0 \leq F(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$,

ii) F ist nicht fallend,

iii) F ist rechtsstetig, d.h. $\lim_{s \downarrow t} F(s) = F(t)$,

iv) $\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$ und $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$.

Jede Verteilungsfunktion entspricht genau einem Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$!

In der Vorlesung haben wir zwei Spezialfälle von Verteilungsfunktionen genauer behandelt: Diskrete und stetige Verteilungsfunktionen.

Verteilungsfunktionen

- Ist $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ messbar mit $\int f(x)\, dx = 1$ (also insbesondere integrierbar), dann heißt f Dichtefunktion der Verteilungsfunktion

$$F(t) := \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

  Ist F von obiger Form, so ist f die Dichte von F. Verteilungsfunktion mit Dichte nennen wir absolutstetige Verteilungsfunktionen und die dazugehörigen Maße $\mathbb{P}_F$ absolutstetige Maße.
- Für $a_1, a_2, \ldots, a_N$, $N \in \mathbb{N}$ oder $N = \infty$ mit $p_1, \ldots, p_N \geq 0$ und $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$ ist

$$F(t) := \sum_{k=1}^{N} p_k \mathbb{1}_{[a_k, \infty)}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

  eine diskrete Verteilungsfunktion. F hat höchstens abzählbare Sprungstellen und ist ansonsten konstant. Die zugehörigen Maße $\mathbb{P}_F$ werden diskrete Verteilungen oder Maße genannt und es gilt

$$\mathbb{P}_F = \sum_{k=1}^{N} p_k \delta_{a_k}.$$

Zufallsvariablen

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt eine $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Abbildung

$$X \colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto X(\omega),$$

Zufallsvariable.

- Eine Zufallsvariable X ordnet also jedem Elementarereignis ω einen Wert/eine Auszahlung in $\mathbb{R}$ zu.
- Wenn $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, ist auch $f(X)$ eine Zufallsvariable, da die Verkettung messbarer Abbildungen messbar ist.
- X muss $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar sein, damit wir die Wahrscheinlichkeit, dass X Werte in einer Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ annimmt, bestimmen können. ⇝ Verteilung

Verteilungen von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) \overset{\text{Not.}}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

Verteilung von X.

- Hier wird die Messbarkeit von X wichtig, da wir dadurch wissen, dass $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt und somit $\mathbb{P}_X(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ wohldefiniert ist.
- $\mathbb{P}_X$ ist der push-forward (das Bildmaß) von X.
- Nach der Vorlesung ist $\mathbb{P}_X$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
  $\rightsquigarrow$ Verteilungsfunktionen und Integrale
- Passt zu unserer Definition des stochastischen Modells, wo die ZV X nur die Beobachtung/Auszahlung modelliert, während der W-Raum das zufällige Experiment beschreibt.

Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$F_X \colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad t \mapsto F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}_X((-\infty, t]),$$

Verteilungsfunktion von X.

- Wir schreiben $X \sim F_X$ oder $X \sim \mathbb{P}_X$ und sagen X ist gemäß F_X bzw. $\mathbb{P}_X$ verteilt.
- In (fast) allen Fällen geben wir nur die Verteilung $\mathbb{P}_X$ (also der push-forward von $\mathbb{P}$ unter X) an, ohne den W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ oder die ZV X selbst näher zu bestimmen. Warum geht das? ⇝ Kanonische Konstruktion!

Der kanonische Wahrscheinlichkeitsraum

Problem: Warum existiert überhaupt eine z.B. Exp-verteilte Zufallsvariable?

Satz (Existenz stochastischer Modelle)

Für jede Verteilungsfunktion existiert eine Zufallsvariable X mit $X \sim F$. Genauer: Es existiert ein stochastisches Modell, d.h. ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und einer ZV X auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $X \sim F$.

Für den Beweis setzen wir $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_F$ und $X(\omega) = \omega$. Das reicht. Das Maß $\mathbb{P}_F$ bekommen wir hier aus Carathédory (das ist die größte Schwierigkeit des Beweises). Für diskrete Zufallsvariablen ist das natürlich viel komplizierter als nötig (siehe Skript).

Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen

- Eine Zufallsvariable heißt absolutstetig mit Dichte f, wenn die Verteilungsfunktion F_X von X die Dichte f hat. Es gilt also

$$\mathbb{P}(X \in (a, b]) = \mathbb{P}_X((a, b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

- Eine Zufallsvariable heißt diskret, wenn F_X eine diskrete Verteilungsfunktion ist. X nimmt also nur abzählbar viele Werte $a_1, \ldots, a_N$ an und es gilt

$$\mathbb{P}(X = a_k) = p_k.$$

- Die Verteilung(-sfunktion) einer Zufallsvariablen X gibt also an, welche Werte X mit welcher Wahrscheinlichkeit annimmt.

Wichtige Rechenobjekte

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. So heißen, falls die Integrale wohldefiniert sind:

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X(\omega)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \quad \textit{Erwartungswert von } X,$$

$$\mathbb{E}[X^k] := \int_\Omega X^k(\omega)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \quad \textit{k-tes Moment von } X,$$

$$\mathbb{V}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \quad \textit{Varianz von } X,$$

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda X}] := \int_\Omega \mathrm{e}^{\lambda X(\omega)}\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \quad \textit{exponentielles Moment von } X.$$

Wie können wir diese abstrakten Integrale nun berechnen?

Schritt 1: Anwendung des Trafo-Satzes

Satz (Transformationssatz)

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, $f\colon \Omega \to \Omega'$ und $g\colon \Omega' \to \bar{\mathbb{R}}$. Dann ist g μ_f-integrierbar genau dann, wenn $g \circ f$ μ-integrierbar ist, und falls eine dieser Eigenschaften erfüllt ist gilt

$$\int_\Omega g \circ f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega'} g \, \mathrm{d}\mu_f.$$

Also gilt für eine Zufallsvariable X und eine messbare Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[g(X)] := \int_\Omega g(X(\omega)) \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x),$$

wenn $g \circ X$ $\mathbb{P}$-integrierbar oder f $\mathbb{P}_X$-integrierbar ist.

Es reicht also aus die Verteilung der Zufallsvariablen X zu kennen! (Das Integral auf der rechten Seite ist unabhängig von der Wahl von $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, X)$).

Beispiele

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x),$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}[X])^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x),$$

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx} \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x),$$

falls die Integrale existieren.
$\mathbb{P}_X$ ist ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Falls $\mathbb{P}_X$ (bzw. F_X) nun entweder absolutstetig ist (d.h. eine Dichte hat) oder diskret ist, können wir unsere Rechenregeln nutzen.

Berechnungsregeln

Satz

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $g : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar, so gelten:

i) *Ist X absolutstetig mit Dichte f, so gilt*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\, dx$$

ii) *Ist X diskret und nimmt die Werte $a_1, ..., a_N \in \mathbb{R}$ mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, ..., p_N$ an, so gilt*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^{N} g(a_k) p_k$$

Wichtig: Auch hier gilt die Gleichheit nur, wenn eine der beiden Seiten wohldefiniert ist. Das müsst ihr immer begründen.

Erwartungswerte sind nur Integrale!

Satz

Seien X, Y Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[|X|], \mathbb{E}[|Y|] < \infty$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gelten:

i) $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$

ii) $X \geq 0\, \mathbb{P} - f.s. \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq 0$ *und* $X \geq Y\, \mathbb{P} - f.s. \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$

iii) *Ist* $X = \alpha\, \mathbb{P} - f.s.$, *d.h.* $\mathbb{P}(X = \alpha) = 1$, *so ist* $\mathbb{E}[X] = \alpha$

iv) $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)]$, *insbesondere gilt* $F_X(t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(-\infty,t]}(X)]$, $t \in \mathbb{R}$

Auch die Konvergenzsätze (MCT, DCT), sowie die Integralungleichungen (z.B. Hölder) gelten analog für Erwartungswerte.

Momenterzeugende Funktion von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$M_X \colon D \mapsto [0, \infty), \quad t \mapsto M_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$$

momenterzeugende Funktion von X, wobei

$$D := \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[e^{tX}] < \infty\}.$$

Momenterzeugende Funktion von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$M_X \colon D \mapsto [0, \infty), \quad t \mapsto M_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$$

momenterzeugende Funktion von X, wobei

$$D := \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[e^{tX}] < \infty\}.$$

- Es gilt immer $D \neq \emptyset$, da $M_X(0) = \mathbb{E}[e^{0X}] = \mathbb{E}[1] = 1 < \infty$.
- Falls ein $\epsilon > 0$ existiert, mit $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq D$, so gilt nach der Vorlesung

$$\mathbb{E}[X^k] = M_X^{(k)}(0)$$

wobei $M_X^{(k)}(0)$ die $k-$te Ableitung an der Stelle 0 ist.
⇝ Deshalb momenterzeugende Funktion.

Markov- und Tschebycheffungleichung

Satz (Markov- und Tschebycheffungleichung)

Sei X eine Zufallsvariable, dann gelten für $a > 0$ folgende Ungleichungen

i) Für $h : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ wachsend gilt

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[h(X)]}{h(a)} \qquad \text{(Markovungleichung)}$$

ii) Für $h : [0, \infty) \to (0, \infty)$ wachsend gilt

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[h(|X|)]}{h(a)} \qquad \text{(Markovungleichung)}$$

iii)

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{a^2} \qquad \text{(Tschebycheffungleichung)}$$

Allgemeine Hinweise zu Rechenaufgaben

- Bevor ihr die Rechenregeln für diskrete oder stetige Verteilung benutzt, müsst ihr begründen, warum das Integral wohldefiniert ist.
- Die Wohldefiniert zeigt man, indem man den Positiv- und Negativteil einer Funktion separat betrachtet.
- In den meisten Beispielen, die ihr kennt, ist der Integrand aber fast sicher nichtnegativ und somit das Integral direkt wohldefiniert, da der Negativteil 0 ist.
- Uneigentliche Integrale müsst ihr mit MCT abschneiden, das heißt es darf NICHT einfach die Stammfunktion gebildet werden. Sowas wie $[\dots]_0^\infty$ ist nicht erlaubt!
- Denkt daran, eure Rechenschritte sauber zu begründen (z.B. Linearität, Voraussetzungen für MCT checken...)

Aufgabenblock 4

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf dem die Zufallsvariablen

$$X \sim \mathrm{Poi}(\lambda) \qquad Y \sim \mathrm{Bin}(n, p) \qquad Z \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

mit $\lambda > 0$, $p \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben seien.

a) Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariable $aX^2 + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Berechne die momenterzeugende Funktion und die Varianz von Y.

c) Berechne die Dichtefunktion und die Verteilung der Zufallsvariable $-Z$.

a) Da $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ gilt $p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Wir berechnen zunächst das zweite Moment von X (wohldefiniert, da $X^2 \geq 0$ und messbar) mithilfe von Indexverschiebungen und Linearität:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{(k+1)}}{k!} \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$= \lambda \mathbb{E}[X] + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k$$
$$= \lambda^2 + \lambda,$$

wobei $\mathbb{E}[X] = \lambda$.
Also gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit Linearität des Erwartungswerts:

$$\mathbb{E}[aX^2 + b] = a \cdot \mathbb{E}[X^2] + b = a \cdot (\lambda^2 + \lambda) + b.$$

b) Da $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ gilt, dass $\mathcal{M}_Y(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$ definiert ist, da Y nur Masse auf $\{0, \ldots, n\}$ hat.
Durch den Binomischen Lehrsatz und da für $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} \\
&= (pe^t + (1-p))^n.
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabenblock 4

Mit dem Satz aus der Vorlesung gilt nun $\mathbb{E}[Y^k] = \mathcal{M}_Y^{(k)}(0)$.
Zweimaliges Ableiten der Momenterzeugenden Funktion gibt:

$$\mathcal{M}_Y^{(1)}(t) = n(pe^t + (1-p))^{n-1} \cdot pe^t$$
$$\mathcal{M}_Y^{(2)}(t) = (n-1)n(pe^t + (1-p))^{n-2} \cdot pe^t \cdot pe^t + n(pe^t + (1-p))^{n-1} \cdot pe^t$$

Lösung Aufgabenblock 4

Mit dem Satz aus der Vorlesung gilt nun $\mathbb{E}[Y^k] = \mathcal{M}_Y^{(k)}(0)$.
Zweimaliges Ableiten der Momenterzeugenden Funktion gibt:

$$\mathcal{M}_Y^{(1)}(t) = n(pe^t + (1-p))^{n-1} \cdot pe^t$$
$$\mathcal{M}_Y^{(2)}(t) = (n-1)n(pe^t + (1-p))^{n-2} \cdot pe^t \cdot pe^t + n(pe^t + (1-p))^{n-1} \cdot pe^t$$

Ausgewertet an der Stelle $t = 0$ gibt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] = \mathcal{M}_Y^{(1)}(0) &= n(1)^{n-1} \cdot p = np \\ \mathbb{E}[Y^2] = \mathcal{M}_Y^{(2)}(0) &= (n-1)n(1)^{n-2} \cdot p^2 + np \\ &= n^2p^2 - np^2 + np\end{aligned}$$

$$\text{Also } \mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = np - np^2 = np(1-p).$$

c) Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt da $Z \sim \mathcal{U}([0,1])$

$$\mathbb{P}(-Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbb{1}_{[0,1]}(-z)\mathrm{d}z$$

Da $0 \leq -z \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq z \geq -1$ gilt

$$\mathbb{P}(-Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbb{1}_{[0,1]}(-z)\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{t} \mathbb{1}_{[-1,0]}(z)\mathrm{d}z$$

Damit gilt $-Z \sim \mathcal{U}([-1,0])$ mit Dichte $f(z) = \mathbb{1}_{[-1,0]}(z)$.

Zufallsvektoren

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung

$$X\colon \Omega \to \mathbb{R}^d, \quad \omega \mapsto X(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ \vdots \\ X_d(\omega) \end{pmatrix},$$

heißt Zufallsvektor, falls sie $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-messbar ist.

- X ist genau dann ein Zufallsvektor, wenn alle $X_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen sind, also wenn sie $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar sind.

Verteilungen von Zufallsvektoren

Definition

Das Maß

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ heißt Verteilung des Zufallsvektors X.

Definition

Die Funktion F_X mit

$$F_X(t_1, \ldots, t_d) := \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \ldots, X_d \leq t_d)$$

heißt Verteilungsfunktion von X. Sie wird auch als gemeinsame Verteilungsfunktion der ZVen $X_1, \ldots, X_d$ bezeichnet.

- Für $k = 1, \ldots, d$ heißen

$$\mathbb{P}_{X_k}(B) = \mathbb{P}(X_k \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad F_{X_k}(t) = \mathbb{P}(X_k \leq t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Randverteilung bzw. Randverteilungsfunktion.

Stetige und diskrete Zufallsvektoren

Definition

- $X_1, \dots, X_d$ haben die gemeinsame Dichte f, falls die gemeinsame Verteilungsfunktion F_X absolutstetig ist mit Dichte f.
- In diesem Fall haben auch $X_1, \dots, X_d$ Dichten und es gilt

$$f_i(x_i) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{(d-1)\text{-viele}} \underbrace{f(x_1, \dots, x_d)}_{x_i \text{ fest}} \underbrace{dx_1 \dots dx_d}_{\text{ohne } x_i}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- $X_1, \dots, X_d$ heißen diskret falls $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}^d$ existieren mit

$$\mathbb{P}(X = a_k) = \mathbb{P}(X_1 = a_{k,1}, \dots, X_d = a_{k,d}) = p_k$$

und $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$ für ein $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Alternativ: Falls die gemeinsame Verteilungsfunktion F_X diskret ist.

Unabhängige Zufallsvariablen

Definition

Seien $X_1, ..., X_d$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

i) $X_1, ..., X_d$ heißen **unabhängig**, falls die gemeinsame Verteilungsfunktion in die Randverteilungsfunktionen faktorisiert, d. h.

$$F_X(t_1, ..., t_d) = F_{X_1}(t_1) \cdot ... \cdot F_{X_d}(t_d), \quad t_i \in \mathbb{R}$$

oder mit Wahrscheinlichkeiten geschrieben

$$\mathbb{P}(X_1 \leq t_1, ..., X_d \leq t_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(X_d \leq t_d), \quad t_i \in \mathbb{R}.$$

ii) $X_1, ..., X_d$ heißen **abhängig**, falls sie nicht unabhängig sind.

iii) $X_1, ..., X_d$ heißen **unabhängig und identisch verteilt** (**u.i.v.**), falls sie unabhängig und identisch verteilt ($F_{X_1} = ... = F_{X_d}$) sind. Weil die gemeinsame Verteilungsfunktion F bei u.i.v. Zufallsvariablen schon eindeutig durch jede Randverteilungsfunktion festgelegt ist, gibt man oft nur die Verteilung von X_1 an.

Gemeinsame Dichten und Unabhängigkeit

Satz

Sind $X_1, ..., X_d$ Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte f, dann gilt:

$$X_1, ..., X_d \text{ sind unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f_1(x_1) \cdot ... \cdot f_d(x_d) \quad \text{Lebesgue-fast überall,}$$

wobei $f_1, ..., f_d$ Dichten von $X_1, ..., X_d$ sind.

Rechenregeln mit gemeinsamen Dichten

Satz

Sind $X_1, ..., X_d$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, so gelten:

i) *Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A(X)] = \mathbb{P}(X \in A)$.*

ii) *Haben $X_1, ..., X_d$ eine gemeinsame Dichte f, so gilt*

$$\mathbb{E}[g(X_1, ..., X_d)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, ..., x_d) f(x_1, ..., x_d)\, d(x_1, ..., x_d).$$

iii) *Sind $X_1, ..., X_d$ diskret und nimmt der Zufallsvektor $X = (X_1, ..., X_d)$ die Vektoren $a_1, ..., a_N \in \mathbb{R}^d$ mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, ..., p_N$ an, so gilt*

$$\mathbb{E}[g(X_1, ..., X_d)] = \sum_{k=1}^{N} p_k g(a_k) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X = a_k) g(a_k).$$

Wie für $d = 1$ gilt in (ii) und (iii), dass die Erwartungswerte wohldefiniert sind (oder existieren), genau dann, wenn die Integrale bzw. Summen wohldefiniert (oder endlich) sind.

Rechenregeln für unabhängige Zufallsvariablen

Satz

Sind $X_1, ..., X_d$ unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, so gilt

$$\mathbb{E}[g_1(X_1) \cdot ... \cdot g_d(X_d)] = \mathbb{E}[g_1(X_1)] \cdot ... \cdot \mathbb{E}[g_d(X_d)]$$

für alle messbaren $g_1, ..., g_d : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. Insbesondere gilt auch

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, ..., X_d \in A_d) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_1}(X_1)] \cdot ... \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_d}(X_d)] = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(X_d \in A_d)$$

für alle $A_1, ..., A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Faltung diskreter und stetiger Verteilungen

Für diskrete Verteilungen braucht man die Faltung eigentlich überhaupt nicht! Seien X_1, X_2 unabhängige, diskrete Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = a) = \sum_{b \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = a - b)\mathbb{P}(X_2 = b).$$

Für Summen unabhängiger stetiger Zufallsvariablen braucht man hingegen die Faltung. Diese liefert dann eine Regel für die Dichte der Zufallsvariable $X_1 + X_2$, wenn X_1, X_2 unabhängige, stetige Zufallsvariablen, denn nach der Vorlesung gilt für diese

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x - y) f_Y(y) \, \mathrm{d}y.$$

Abkürzung über momenterzeugende Funktion

Die Faltung explizit zu berechnen ist meistens mühsam. Oft können wir aber zum Glück eine Eigenschaft der momenterzeugenden Funktion ausnutzen, um uns das Leben etwas einfacher zu machen.

Satz

Seien X, Y Zufallsvariablen für die die momenterzeugenden Funktionen M_X, M_Y in $(-\epsilon, \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ existieren. Falls $M_X(t) = M_Y(t)$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, so gilt $X \sim Y$.

Über die momenterzeugende Funktion der Summe von unabhängigen Zufallsvariablen können wir folgendes sagen:

Satz

Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $M_X(t), M_Y(t) < \infty$ für $t \in \mathbb{R}$, so gilt auch

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t).$$

Aufgabenblock 5

a) Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit $M_X < \infty$, $M_Y(t) < \infty$ ein $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$ gilt.

b) Seien $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ unabhängige Zufallsvariablen mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$. Zeige, dass $X + Y \sim \text{Bin}(n + m, p)$ gilt.

Lösung Aufgabenblock 5

a) Da die Erwartungswerte unabhängiger Zufallsvariablen faktorisieren gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{M}_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{tX} \cdot e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{tX}]\mathbb{E}[e^{tY}] = \mathcal{M}_X(t) \cdot \mathcal{M}_Y(t)$$

b) Die momenterzeugenden Funktionen sind für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert und gegeben durch

$$M_X(t) = (pe^t + (1-p))^n, \quad M_Y(t) = (pe^t + (1-p))^m.$$

Nach der (a) gilt, da X, Y unabhängig

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t) = (pe^t + (1-p))^{n+m}.$$

Also gilt

$$M_{X+Y}(t) = M_{\mathrm{Bin}(n+m,p)}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

und da die momenterzeugende Funktion, falls sie in einer Umgebung der Null existiert, die Verteilung eindeutig bestimmt folgt die Behauptung.

Fast geschafft! Zum Abschluss jetzt noch Konvergenz von Zufallsvariablen

Konvergenz von Zufallsvariablen

Definition (Fast sicher Konvergenz)

Sei X eine Zufallsvariable und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($\mathbb{P}$)-fast sicher gegen X, falls

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

gilt. Man schreibt

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} X.$$

- Die fast sichere Konvergenz von Zufallsvariablen ist dazu äquivalent, dass eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ existiert, sodass für alle $\omega \in N^C$

  $$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

  gilt.

Konvergenz von Zufallsvariablen

Definition (Konvergenz im p-ten Mittel)

Sei X eine Zufallsvariable und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$, $\mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$, für ein $p \geq 1$. Dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im p-ten Mittel (oder in $\mathcal{L}^p$) gegen X, falls

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$$

gilt. Man schreibt

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} X.$$

- Ihr kennt die $\mathcal{L}^p$-Konvergenz schon aus dem Kapitel zu $\mathcal{L}^p$-Räumen, nur wird sie hierbei explizit auf Zufallsvariablen angewendet (denkt daran Erwartungswerte sind Integrale!).

Konvergenz von Zufallsvariablen

Definition (Stochastische Konvergenz)

Sei X eine Zufallsvariable und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch (oder in Wahrscheinlichkeit) gegen X, falls für alle $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

gilt. Man schreibt

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X.$$

- Man folgert stochastische Konvergenz häufig direkt aus der Konvergenz im p-ten Mittel mit der Markov-Ungleichung (oder Spezialfall Chebyshev-Ungleichung).

Konvergenz von Zufallsvariablen

Definition (Konvergenz in Verteilung)

Sei X eine Zufallsvariable und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X, falls für alle stetigen, beschränkten, reell-wertigen Funktionen f (oder kurz $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$)

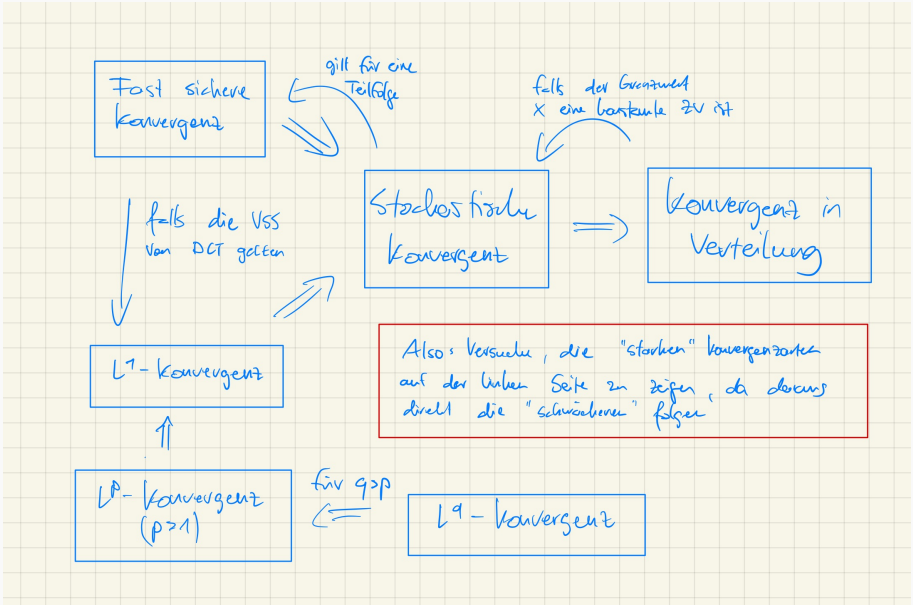
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$$

gilt. Man schreibt

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} X.$$

- Die Konvergenz in Verteilung ist die schwächste (hier behandelte) Art der Konvergenz von Zufallsvariablen.

Bildchen (Konvergenzdiagramm)



Schwaches GGZ

Satz

i) *Klassische Variante: Sind $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, so gilt*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} \mathbb{E}[X_1].$$

ii) *Variante mit schwächeren Annahmen: Sind $X_1, X_2, \ldots$ paarweise unkorreliert mit identischem Erwartungswert und*

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

so gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} \mathbb{E}[X_1].$$

Starkes GGZ

Satz

Sind $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. mit $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, so gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \mathbb{E}[X_1].$$

Starkes GGZ

Satz

Sind $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. mit $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, so gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \mathbb{E}[X_1].$$

- Teil (i) im schwachen GGZ wurde nur aus didaktischen Gründen behandelt, denn diese Aussage folgt direkt aus dem starken Gesetz der großen Zahlen.
- Teil (ii) im schwachen GGZ ist deutlich interessanter, denn unter diesen Annahmen muss das starke GGZ nicht gelten!

Aufgabenblock 6

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein WRaum auf dem die Folgen von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Zufallsvariable Z gegeben seien mit

$$X_n \sim \mathrm{Exp}(n), \quad \mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \mathbb{V}[Y_n] = \frac{\sigma^2}{n},$$

für $\sigma > 0$. Zeige $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ und $Y_n + Z \xrightarrow[n\to\infty]{P} Z$.

b) Zeige: Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v., so gilt für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{n}\#\{i \le n : X_i \in A\} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \mathbb{P}(X_1 \in A).$$

Lösung Aufgabenblock 6

a) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$, da $X_n \sim \text{Exp}(n)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n - 0| > \epsilon) &= \mathbb{P}(X_n > \epsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_n \leq \epsilon) \\ &= 1 - F_{X_n}(\epsilon) \\ &= 1 - (1 - e^{-n\epsilon}) \\ &= e^{-n\epsilon},\end{aligned}$$

und somit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - 0| > \epsilon) = 0,$$

für alle $\epsilon > 0$, also per Definition

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Bemerkung: Ihr hättet auch $\mathcal{L}^1$-Kovergenz zeigen können. Nun zur zweiten Behauptung:
Sei wieder $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit der Markov-Ungleichung und der Verschiebungsformel

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|Z + Y_n - Z| > \epsilon) &= \mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[|Y_n|^2]}{\epsilon^2} \\ &= \frac{\mathbb{V}(Y_n) + \mathbb{E}[Y_n]^2}{\epsilon^2} \\ &= \frac{\sigma^2 + 1}{n\epsilon^2}\end{aligned}$$

und somit folgt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Z + Y_n - Z| > \epsilon) = 0$, also per Definition $Z + Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Z$.

b) Für $i \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$Y_i := \mathbb{1}_A(X_i)$$

Die Y_i sind u.i.v nach Korollar 4.2.28 und es gilt

$$\mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X_1)] = \mathbb{P}(X_1 \in A) \leq 1 < \infty$$

Also kann das starke Gesetz der großen Zahlen angewandt werden und es gilt

$$\frac{1}{n}\#\{i \leq n : X_i \in A\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{P}(X_1 \in A).$$

Die gezeigte Aussage heißt übrigens Empirisches Gesetz der großen Zahlen.