Aufgabe 1

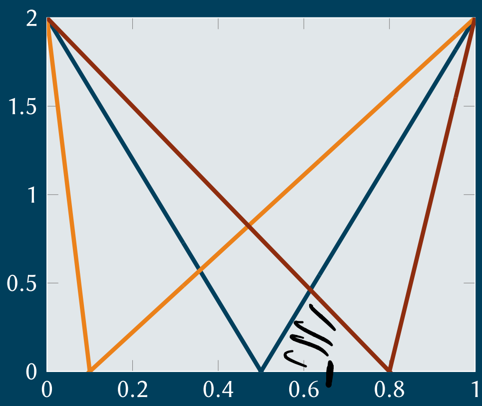
Sei für $c \in (0, 1)$ die Dichtefunktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

$$x \mapsto 2\left(1 - \frac{1}{c}x\right)\mathbb{1}_{(0,c]}(x) + 2\left(\frac{1}{1-c}x - \frac{c}{1-c}\right)\mathbb{1}_{(c,1]}(x)$$

gegeben.

Berechne die Verteilungsfunktion von f für $c = \frac{1}{2}$.



$c = 0.1$ Orange, $c = 0.5$ Blau, $c = 0.8$ Rot

Für $c=\frac{1}{2}$: $f(x) = 2(1-2x)\,\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(x) + 2(2x-1)\,\mathbb{1}_{(\frac{1}{2},1]}(x)$

Damit gilt für $t\in\mathbb{R}$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} 2(1-2x)\,\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(x) + 2(2x-1)\,\mathbb{1}_{(\frac{1}{2},1]}(x)$$

$$= \begin{cases} 0, & t\leq 0 \\ \int_0^t 2(1-2x)\,dx = [2x-2x^2]_0^t = 2t-2t^2, & 0<t\leq\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\int_{1/2}^t 2(2x-1)\,dx = \frac{1}{2}+[2x^2-2x]_{1/2}^t \\ \qquad = \frac{1}{2}+2t^2-2t-\frac{1}{2}+1 = 2t^2-2t+1, & \frac{1}{2}<t\leq 1 \\ 1, & t>1 \end{cases}$$

Dichten vs. Verteilungsfunktionen ($c = 0.1$ Orange, $c = 0.5$ Blau, $c = 0.8$ Rot)