

Aufgabe 1

a) Sei μ ein endliches (und nicht triviales) Maß auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeige, dass für ein ~~$c \in \mathbb{R}$~~ ^{$c > 0$} auch $\tilde{\mu} := c \cdot \mu$ ein endliches Maß ist. Wie muss c gewählt werden, damit $\tilde{\mu}$ ein W-Maß ist?

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Betrachte das Maß

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty), \quad A \mapsto \sum_{k=1}^n \delta_k(A) \cdot k$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Wie muss c hier gewählt werden, damit das Maß $\tilde{\mu} := c \cdot \mu$ ein W-Maß ist?

a) Sei $c \geq 0$. Überprüfe Eigenschaften

(0) Für $A \in \mathcal{A}$ gilt $\tilde{\mu}(A) \stackrel{\text{Def.}}{=} c \cdot \mu(A) \geq 0$, da $c \geq 0 \in \mathbb{R}$

(1) $\tilde{\mu}(\emptyset) \stackrel{\text{Def.}}{=} c \cdot \mu(\emptyset) \stackrel{\mu \text{ Maß}}{=} c \cdot 0 = 0$ μ ist Maß

(2) Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \stackrel{\text{Def.}}{=} c \cdot \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \stackrel{\mu \text{ Maß}}{=} c \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$$\stackrel{\text{alle}}{\text{Summanden}} \geq 0 = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot \mu(A_n) \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n) \quad \text{4}$$

μ^2 ist endlich, denn $\mu^2(\Omega) \stackrel{\text{Def.}}{=} c \cdot \mu(\Omega) < \infty$

Damit μ^2 ein ν -Maß ist, muss gelten

$$1 \stackrel{!}{=} \mu^2(\Omega) \stackrel{\text{Def.}}{=} c \cdot \mu(\Omega) \quad (\Leftrightarrow) \quad c = \frac{1}{\mu(\Omega)}$$

b) Mit a) folgt, dass für die Wahl $c = \frac{1}{\mu(N)}$ ist, μ^2 ein ν -Maß.

$$\mu(N) \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^n \underbrace{\delta_k(N)}_{=1} \cdot k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow c = \frac{2}{n(n+1)}$$

Aufgabe 2

Zeige, dass die folgenden Mengensysteme Erzeuger der Borelschen σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind:

$$\mathcal{E}_1 := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ abgeschlossen}\},$$

$$\mathcal{E}_2 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}.$$

Ihr dürft verwenden, dass $\mathcal{E} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugt.

- Zweit zeige $\sigma(E_1) = \sigma(\emptyset) \stackrel{\text{Def.}}{=} \emptyset$

Mit Trick: $G_1 \subseteq \sigma(\emptyset)$ sowie $\emptyset \subseteq \sigma(E_1)$

Sei also $A \in E_1$, d.h. A ist abgeschlossen. Dann ist A^c offen, d.h. $A^c \in \sigma(\emptyset)$. Also ist auch $(A^c)^c = A \in \sigma(\emptyset)$, da $\sigma(\emptyset)$ σ -Alg. ist.

Sei $E \in \emptyset$, dann ist E^c abgeschlossen und insb. $E^c \in \sigma(G_1)$ und mit Eig (ii) eine σ -Alg auch

$$\bar{E} = (E^c)^c \in \sigma(G_1)$$

- Nun $\sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_1)^{\text{Top}} = \mathcal{I}(\mathbb{R})$

Sei also $[a, b] \in \mathcal{E}_2$. Es gilt

$$[a, b] = \bigcap_{n \geq 1} \underbrace{(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})}_{\in \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})} \in \sigma(\mathcal{E}) \text{ da } \sigma\text{-Alg}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &\in \sigma(\mathcal{E}_1) \\ \mathcal{E}_1 &\in \sigma(\mathcal{E}_2) \end{aligned}$$

$\Uparrow \Rightarrow$ Gleichheit
der erz. σ -Algs.

Ebenso $[a, b] = \bigcup_{n \geq 1} \underbrace{[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]}_{\in \mathcal{E}_1} \in \sigma(\mathcal{E}_1)$, da $\cup$ -stabil

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl und

$$\mathcal{D} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \#(A \cap \{1, \dots, n\}) \text{ gerade oder } 0\}.$$

a) Zeige, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System (über $\mathbb{N}$) ist.

b) Ist $\mathcal{D}$ auch eine σ -Algebra (über $\mathbb{N}$)?

a) Überprüfe Eigenschaft

n) $N \in \mathcal{D}$, d.h. $\#(N \cap \{1, \dots, n\}) = \# \{1, \dots, n\} = n$
gerade nach VSS

(2) Sei $A \in \mathcal{D}$. z.z. $A^c \in \mathcal{D}$, d.h. $\#(A^c \cap \{1, \dots, n\})$ gerade
oder 0. $A \cup A^c = N$

$\#(A^c \cap \{1, \dots, n\}) = n - \underbrace{\#(A \cap \{1, \dots, n\})}_{\text{gerade, da } A \in \mathcal{D}}$ gerade oder 0

3) Seien $A_1, A_2, \dots \subseteq \mathbb{N}$ pw. disjunkt.

Dann haben höchstens n Mengen einen nichtleeren Schnitt mit $\{1, \dots, n\}$. Sei diese Anzahl gegeben durch $0 \leq m \leq n$. $\exists$ die ersten m viele.

Dann

$$\# \left(\bigcup_{k=1}^m A_k \cap \{1, \dots, n\} \right) \stackrel{\text{so.}}{=} \# \left(\bigcup_{k=1}^m A_k \cap \{1, \dots, n\} \right)$$

$$\text{disjunkt} \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^m \underbrace{\#(A_k \cap \{1, \dots, n\})}_{\text{gerade oder } 0} \quad \text{gerade oder } 0, \quad \text{d.h. } \forall A_k \in \mathcal{P}$$

$\mathcal{D}$ ist keine σ -Alg. denn z.B. gilt für $n=4$

$$S_{1,2} \in \mathcal{D} \quad \& \quad S_{2,3} \in \mathcal{D}$$

Aber $S_{1,2} \cap S_{2,3} = S_{2,3} \notin \mathcal{D}$, denn

$$\#(S_{2,3} \cap S_{1,\dots,4}) = 1 \quad \underline{\text{ungerade}}$$

Also ist $\mathcal{D}$ nicht n -stabil und mit

Hauptsatz für D-S Syst: $\mathcal{D}$ ist keine σ -Alg.