Aufgabe 1

a) Skizziere die 4 Mengenoperationen für 2 Mengen.

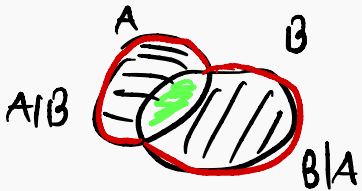
b) Sei $\Omega = \{a, b, 1\}$. Gebe $\mathcal{P}(\Omega)$ an.

c) Beweise die De Morgan'schen Rechenregeln:

$$\left(\bigcup_{n \in I} A_n\right)^C = \bigcap_{n \in I} A_n^C \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{n \in I} A_n\right)^C = \bigcup_{n \in I} A_n^C.$$

Versuche dabei, jeden Rechenschritt so genau wie möglich zu begründen.

a)



b) $\Omega = \{a, b, \eta\}$. $\mathcal{P}(\Omega) = \{\Omega, \phi, \{a\}, \{b\}, \{\eta\}, \{a, b\}, \{b, \eta\}, \{a, \eta\}\}$

c). Sei $x \in \left(\bigcup_{n\in I} A_n\right)^c$, d.h. $x \notin \bigcup_{n\in I} A_n$

Eig. $\bigcup$ $\Leftrightarrow$ $x \notin A_n \ \forall n \in I$ Def. $\Leftrightarrow$ $x \in A_n^c \ \forall n \in I$

Eig. $\bigcap$ $\Leftrightarrow$ $x \in \bigcap_{n\in I} A_n^c$

- Sei $x \in \left(\bigcap_{n\in I} A_n\right)^c$, d.h. $x \notin \bigcap_{n\in I} A_n$

Eig $\bigcap$ $\Leftrightarrow$ $\exists n \in I : x \notin A_n$ Def. $\Leftrightarrow$ $\exists n \in I : x \in A_n^c$

Eig $\bigcup$ $\Leftrightarrow$ $x \in \bigcup_{n\in I} A_n^c$

Abbildungen

Definition

Seien X, Y zwei nichtleere Mengen. Eine **Abbildung** f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ ein eindeutiges Element $f(x) = y \in Y$ zuordnet. Man schreibt

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$$

und nennt X den **Definitionsbereich** von f und Y den **Wertebereich** von f.
Für $X' \subseteq X$ definiert $f(X') := \{f(x) \in Y : x \in X'\}$ das **Bild** von X' unter f und für $Y' \subset Y$ definiert $f^{-1}(Y') := \{x \in X : f(x) \in Y'\}$ das **Urbild** von Y' unter f.

Aufgabe 2

Zeige folgende Eigenschaften und Rechenregeln:

- $f^{-1}(Y) = X$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
- Sei $A \subseteq Y$, dann gilt $f^{-1}(A^C) = \left(f^{-1}(A)\right)^C$.
- Sei $(A_n)_{n \in I}$ eine Familie von Teilmengen von Y mit nichtleerer Indexmenge I, dann gilt

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n \in I} A_n\right) = \bigcup_{n \in I} f^{-1}(A_n).$$

a) $f^{-1}(Y) \overset{\text{Def.}}{=} \{x \in X : f(x) \in Y\} \overset{\text{Def.}}{=} X$

$f^{-1}(\emptyset) = \{x \in X : f(x) \in \emptyset\} \overset{\text{Def.}}{=} \emptyset$

b) Sei $x \in f^{-1}(A^c)$, d.h. $f(x) \in A^c \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} f(x) \notin A$

$\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x \notin f^{-1}(A)$

c) Sei $x \in f^{-1}(\bigcup_n A_n)$, d.h. $f(x) \in \bigcup_n A_n$

$\overset{\text{Eig}}{\Leftrightarrow}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $f(x) \in A_n$

$\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $x \in f^{-1}(A_n)$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_n f^{-1}(A_n)$

Indikatorfunktion

Sei $A \subseteq X$, dann nennen wir die Abbildung

$$\mathbf{1}_A : \; X \to \{0,1\}, \quad x \mapsto \mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

die **Indikatorfunktion** der Menge A. Für Indikatorfunktionen gelten folgende Rechenregeln:

i) $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(x)$,

ii) $\mathbf{1}_{A \cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A \cap B}(x)$,

iii) $\mathbf{1}_{A \setminus B}(x) = \mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_{A \cap B}(x)$,

iv) $\mathbf{1}_{A^C}(x) = \mathbf{1}_X(x) - \mathbf{1}_A(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$,

v) $\mathbf{1}_{A \triangle B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - 2 \cdot \mathbf{1}_{A \cap B}(x)$.

Aufgabe 3

Zeige die ersten beiden Eigenschaften der vorherigen Folie.

Sei $x \in X$ bel.

i) Gelte $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1 \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} x \in A \cap B \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} x \in A \wedge x \in B$

$$\Longleftrightarrow \mathbb{1}_A(x)\, \mathbb{1}_B(x) = 1$$

ii) $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$ $\qquad \mathbb{1}_{A \cup B}(x)$

$$= \begin{cases} 1, & x \in A \wedge x \notin B \\ 1, & x \notin A \wedge x \in B \\ 1, & x \in A \wedge x \in B \\ 0, & x \notin A \wedge x \notin B \end{cases} \overset{\text{vergleiche}}{=} \begin{cases} 1, & x \in A \cup B \\ 0, & x \in A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \end{cases} = \mathbb{1}_{A \cup B}(x)$$