Stochastik I

1. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

07.09.22

Agenda

Diese Übung soll als Vorbereitung der Vorlesung gelten und wichtige Grundlage aus Analysis 1 wiederholen. Sie orientiert sich an dem Wiederholungsskript von der Website. Dort könnt ihr alle Inhalte der Übung inklusive weiterer Ausführungen nachlesen. Nutzt die Gelegenheit auch, um bei den Aufgaben saubere Beweisführung zu üben. Wir beschäftigen uns heute mit

1. Mengen
2. Abbildungen
3. Folgen.

Mengen

Definition (Ein paar Definitionen)

Seien Ω und A Mengen. Wir sagen A ist Teilmenge von Ω (oder kurz: $A \subseteq \Omega$), falls für alle $x \in A$ auch $x \in \Omega$ gilt. Die Menge aller Teilmengen von Ω bezeichnen wir als **Potenzmenge** von Ω und schreiben $\mathcal{P}(M) := \{A : A \subseteq M\}$. Die Potenzmenge ist also eine Menge von Mengen. Für zwei Teilmengen A_1, A_2 einer Grundmenge Ω definieren wir folgende Operationen:

- **Durchschnitt** $A_1 \cap A_2 := \{x \in \Omega : x \in A_1 \wedge x \in A_2\}$.
- **Vereinigung** $A_1 \cup A_2 := \{x \in \Omega : x \in A_1 \vee x \in A_2\}$.
- **Differenz** $A_1 \setminus A_2 := \{x \in \Omega : x \in A_1 \wedge x \notin A_2\}$.
- **Symmetrische Differenz** $A_1 \triangle A_2 := (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$.

Falls $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, so sagen wir, dass A_1 und A_2 **disjunkt** sind.

Diese Definitionen lassen sich auch auf beliebige Indexmengen erweitern:

Definition

Sei $(A_n)_{n\in I}$ eine Familie von Teilmengen von Ω mit nichtleerer Indexmenge I. Wir definieren

- $\bigcup_{n\in I} A_n := \{x \in \Omega : \text{Es existiert } n \in I, \text{ sodass } x \in A_n\}$.
- $\bigcap_{n\in I} A_n := \{x \in \Omega : x \in A_n \text{ für alle } n \in I\}$.

Aufgabe 1

a) Skizziere die 4 Mengenoperationen für 2 Mengen.

b) Sei $\Omega = \{a, b, 1\}$. Gebe $\mathcal{P}(\Omega)$ an.

c) Beweise die De Morgan'schen Rechenregeln:

$$\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right)^C = \bigcap_{n\in I} A_n^C \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{n\in I} A_n\right)^C = \bigcup_{n\in I} A_n^C.$$

Versuche dabei, jeden Rechenschritt so genau wie möglich zu begründen.

Abbildungen

Definition

Seien X, Y zwei nichtleere Mengen. Eine **Abbildung** f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ ein eindeutiges Element $f(x) = y \in Y$ zuordnet. Man schreibt

$$f : X \longrightarrow Y, \quad x \mapsto f(x)$$

und nennt X den **Definitionsbereich** von f und Y den **Wertebereich** von f.
Für $X' \subseteq X$ definiert $f(X') := \{f(x) \in Y : x \in X'\}$ das **Bild** von X' unter f und für $Y' \subset Y$ definiert $f^{-1}(Y') := \{x \in X : f(x) \in Y'\}$ das **Urbild** von Y' unter f.

Aufgabe 2

Zeige folgende Eigenschaften und Rechenregeln:

- $f^{-1}(Y) = X$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
- Sei $A \subseteq Y$, dann gilt $f^{-1}(A^C) = \left(f^{-1}(A)\right)^C$.
- Sei $(A_n)_{n\in I}$ eine Familie von Teilmengen von Y mit nichtleerer Indexmenge I, dann gilt

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right) = \bigcup_{n\in I} f^{-1}(A_n).$$

Indikatorfunktion

Sei $A \subseteq X$, dann nennen wir die Abbildung

$$\mathbf{1}_A : \; X \longrightarrow \{0, 1\}, \quad x \mapsto \mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

die **Indikatorfunktion** der Menge A. Für Indikatorfunktionen gelten folgende Rechenregeln:

i) $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(x)$,

ii) $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$,

iii) $\mathbf{1}_{A\setminus B}(x) = \mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$,

iv) $\mathbf{1}_{A^C}(x) = \mathbf{1}_X(x) - \mathbf{1}_A(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$,

v) $\mathbf{1}_{A\triangle B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - 2 \cdot \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$.

Aufgabe 3

Zeige die ersten beiden Eigenschaften der vorherigen Folie.

Folgen

Definition

Eine Folge in einer nichtleere Menge X (z.B. $X = \mathbb{R}$) versteht man eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X, \quad n \mapsto x_n,$$

die jeder natürlichen Zahl n ein Element x_n zuordnet. Eine Folge betrachten wir aber eigentlich nie als Abbildung, sondern schreiben nur $(x_n)_{n\geq 1}$.

Damit wir die Konvergenz von Folgen betrachten können brauchen wir noch ein Maß des Abstands, d.h. eine Metrik. In der Vorlesung betrachten wir fast immer Metriken, die von einer Norm $\|\cdot\|$ induziert werden. Wir sagen dann $(x_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $x \in X$, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\|x_n - x\| < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

In diesem Fall nennen wir x den **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $(x_n)_{n\geq 1}$. Für den Fall $X = \mathbb{R}$ gibt es noch weitere Konvergenzbegriffe.

Limes superior und Limes inferior

Für eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ von reellen Zahlen definieren wir den **Limes inferior** als

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k,$$

und den **Limes superior** als

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k.$$

Auf den ersten Blick sind diese Definition etwas kompliziert, merkt euch einfach: Der **Limes inferior** ist der **kleinste Häufungspunkt** der Folge und der **Limes superior** ist der **größte Häufungspunkt** der Folge. Falls für eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ der Limes inferior und Limes superior den gleichen Wert annehmen, so konvergiert die Folge und es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Macht euch die verschiedenen Konzepte anhand von Beispielen klar, z.B. für die Folgen $x_n = (-1)^n$ und $y_n = \frac{1}{n}(-1)^n$.