Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

6. Übung

1. Nullmengen und Monotonie des Lebesgue-Integrals.

Seien ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, eine Folge von μ-Nullmengen $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und μ-integrierbare Funktionen

$$f, g\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$$

gegeben. Zeige oder widerlege:

a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ ist auch eine μ-Nullmenge. *(1 Punkt)*

b) $f \leq g \implies \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$. *(1 Punkt)*

c) $f \leq g$ μ-fast überall $\implies \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$. *(1 Punkt)*

d) $f < g$ μ-fast überall $\implies \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu < \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$. *(1 Punkt)*

e) $\int_{E_1\cup E_2} f\mathrm{d}\mu = \int_{E_1} f\mathrm{d}\mu + \int_{E_2} f\mathrm{d}\mu$, falls $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ und $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. *(1 Punkt)*

f) $\int_{E_1} f\mathrm{d}\mu \leq \int_{E_2} f\mathrm{d}\mu$, falls $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ und $E_1 \subseteq E_2$. *(1 Punkt)*

g) $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar und $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu < \infty \Rightarrow f < \infty$ μ-fast überall. *(2 Punkte)*

Hinweis: Schaut euch den Beweis des Satzes der Monotonen Konvergenz an für Aufgabe c).

2. Monotone Konvergenz und Reihen.

Seien ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n\colon \Omega \to [0, \infty]$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeige, dass

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu$$

gilt. *(4 Punkte)*

3. Integrierbarkeit positiver Funktionen bezüglich endlicher Maße.

Seien ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit einem endlichen Maß μ und eine positive, messbare, numerische Funktion

$$f\colon \Omega \to [0, \infty]$$

gegeben. Zeige:

a) Wenn f nur Werte in $\mathbb{N}_0$ annimmt, gilt

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f \geq n\}).$$

(3 Punkte)

b) Die Funktion f (nicht notwendigerweise ganzzahlig) ist genau dann μ-integrierbar, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f \geq n\}) < \infty$$

gilt. Was geht schief, wenn μ kein endliches Maß ist? *(3 Punkte)*

4. Momente und exponentielle Momente.

Seien der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}_1 := p\delta_1 + (1-p)\delta_0$$

gegeben. Dann heißt $\mathbb{P}_1$ Bernoulli-Verteilung mit Parameter $p \in (0,1)$ (kurz $\mathbb{P}_1 = \mathrm{Ber}(p)$).
Seien zudem $\mathbb{P}_2$ die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ (kurz $\mathbb{P}_2 = \mathrm{Exp}(\lambda)$), $\mathbb{P}_3$ die Gleichverteilung auf dem Intervall $[a,b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$ (kurz $\mathbb{P}_3 = \mathcal{U}([a,b])$), $\mathbb{P}_4$ die Normalverteilung mit Parameter $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ (kurz $\mathbb{P}_4 = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) und $\mathbb{P}_5$ die Cauchy-Verteilung mit Parameter $s > 0$, $t \in \mathbb{R}$ (kurz $\mathbb{P}_5 = \mathrm{Cauchy}(s,t)$).

a) Berechne (und begründe, warum sie existieren) die k-ten Momente von $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \,\mathrm{d}\mathbb{P}_i(x),$$

für $i = 1,2,3$. *(6 Punkte)*
Hinweis: Zeigt per vollständiger Induktion mit partieller Integration, dass $\int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mathbb{P}_2 = \frac{k!}{\lambda^k}$ *gilt.*

b) Berechne die exponentiellen Momente von $\mathbb{P}_4$, also

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\beta x} \,\mathrm{d}\mathbb{P}_4(x)$$

für $\beta \in \mathbb{R}$. *(2 Punkte)*
Hinweis: Quadratische Ergänzung.

c) Warum ist das erste Moment von $\mathbb{P}_5$ nicht definiert? *(2 Punkte)*

d) Berechne die exponentiellen Momente von $\mathbb{P}_2$. Für welche β sind diese endlich? *(2 Punkte)*

5. Zusatzaufgaben *(Hier könnt ihr noch ein paar Extrapunkte sammeln!)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

a) Sei $f \in \mathcal{E}^+$. Zeige, dass
$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \sum_{a \in f(\Omega)} \int_\Omega a \mathbf{1}_{\{f=a\}} \mathrm{d}\mu$$
gilt. *(3 Punkte)*

b) Seien f, g messbar, $|f| \leq g$ μ-fast überall und g μ-integrierbar. Zeige, dass dann auch f μ-integrierbar ist. *(3 Punkte)*

c) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und λ das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zeige, dass $f = g$ λ-fast überall $f = g$ auf ganz $\mathbb{R}$ impliziert. *(4 Punkte)*

Die Lösungen sind Mittwoch, den 20. Oktober 2021, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen.