Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

5. Übung

1. Dichten und Verteilungsfunktionen.

Seien der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $a, b, s, t, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\lambda, s > 0$ gegeben. Das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Verteilungsfunktion

$$F_1 \colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \frac{x-a}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) + \mathbb{1}_{(b,\infty)}(x),$$

heißt *Gleichverteilung auf* $[a, b]$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Verteilungsfunktion

$$F_2 \colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),$$

heißt *Exponentialverteilung mit Parameter* λ. Sei zudem die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2 + (x-t)^2},$$

gegeben, welche die Dichtefunktion der *Cauchyverteilung mit Parameter* s *und* t bezeichnet.

a) Finde die Dichtefunktionen der Exponentialverteilung mit Parameter λ, sowie der Gleichverteilung auf $[a, b]$.

(4 Punkte)

b) Gebe eine Dichtefunktion und die zugehörige Verteilungsfunktion an, sodass für das korrespondierende Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt :

$$\mathbb{P}((-\infty, 1)) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}([1, \infty)) = \frac{2}{3}.$$

(4 Punkte)

c) Zeige, dass f tatsächlich eine Dichtefunktion definiert und beschreibe den Effekt der Parameter s und t auf die Verteilung der Masse der Cauchyverteilung.

(3 Punkte)

d) Zeige, dass für alle $p > 1$ eine Konstante $C_p \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{C_p} x^{-p} \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x),$$

eine Dichtefunktion definiert.

(3 Punkte)

2. Nochmal Unstetigkeitsstellen von Verteilungsfunktionen.

a) Zeige, dass jede Verteilungsfunktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt.

(3 Punkte)

b) Folgere aus a), dass für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Menge

$$\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\{x\}) > 0\}$$

höchstens abzählbar ist.

(2 Punkte)

3. Integrierbarkeit messbarer Funktionen.

Sei der messbare Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und eine Funktion

$$f \colon \Omega \to \mathbb{R}$$

gegeben.

a) Nehme an, dass f messbar ist und zeige, dass f genau dann integrierbar ist, wenn $|f|$ integrierbar ist.

(4 Punkte)

b) Zeige, dass die Messbarkeit von f im Allgemeinen nicht äquivalent zur Messbarkeit von $|f|$ ist.

(3 Punkte)

4. Noch mehr zu Dirac-Maßen.

Seien eine Folge von reellen Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und das Maß

$$\mu \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty], \quad B \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_n}(B),$$

auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ gegeben. Zeige, dass die messbaren Funktionen

$$f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

genau dann μ-fast überall übereinstimmen, wenn

$$f(x_n) = g(x_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(4 Punkte)

Hinweis: Hierbei stimmen f und g μ-fast überall überein, falls

$$\mu(\{f \neq g\}) = 0$$

gilt.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 13. Oktober 2021, 10:00 Uhr, in Ilias abzugeben.