Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

4. Übung

1. Das Lebesgue-Maß auf einem Intervall.

In dieser Aufgabe zeigt ihr, dass die zwei Ansätze aus Bemerkung 1.4.5 der Vorlesung gleich sind.

Ansatz 1: Sei $\mathcal{B}([0,1]) := \sigma(\{(a,b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\})$ und $\bar{\lambda}_{[0,1]}$ die Fortsetzung der Mengenfunktion $\lambda : \{(a,b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\} \to \mathbb{R}, (a,b] \mapsto b-a$ auf $\mathcal{B}([0,1])$ ist. Diesen Ansatz nennen wir Lebesgue-Maß durch Carathéodory.

Ansatz 2: Sei $\mathcal{B}([0,1]) := \{B \cap [0,1] \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ und $\lambda_{[0,1]}(B) := \lambda(B), B \in \mathcal{B}([0,1])$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bezeichnet. Diesen Ansatz nennen wir Lebesgue-Maß durch Einschränkung.

a) Zeige, dass die σ-Algebren der beiden Ansätze gleich sind. *(2 Punkte)*

b) Zeige, dass $\bar{\lambda}_{[0,1]}$ und $\lambda_{[0,1]}$ Maße auf $\mathcal{B}([0,1])$ sind und $\bar{\lambda}_{[0,1]} = \lambda_{[0,1]}$ gilt. *(2 Punkte)*

2. Eigenschaften messbarer Funktionen.

Seien die messbaren Räume $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}'), (\Omega'', \mathcal{A}'')$ und die messbaren Funktionen

$$f\colon \Omega \to \Omega', \quad g\colon \Omega' \to \Omega''$$

gegeben.

a) Zeige, dass $g \circ f$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}''$-messbar ist.

(2 Punkte)

b) Zeige, dass $\sigma(f) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}'\}$ die kleinste σ-Algebra ist, bezüglich der f messbar ist.

(3 Punkte)

c) Zeige, dass für zwei σ-Algebren $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$ die Abbildung f auch $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$-messbar ist.

(2 Punkte)

3. Der Vektorraum der messbaren Funktionen.

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Zeige, dass für $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktionen

$$f\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad g\colon \Omega \to \mathbb{R}$$

und $\alpha \in \mathbb{R}$ auch

$$\alpha f, f+g, f-g, f \cdot g$$

$\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktionen sind. Folgere daraus, dass der Raum der $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Funktionen ein Vektorraum ist.

Hinweis: Addition und Multiplikation sind hier punktweise zu verstehen, also zum Beispiel $(f+g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

(6 Punkte)

4. Bildmaße von Pseudoinversen.

Sei $\mathbb{P}$ das Maß der Verteilung $\mathcal{U}([0,1])$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, F die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable, die nur endlich viele Werte annimmt und

$$F^{-1} : [0,1] \to \bar{\mathbb{R}}, x \mapsto \inf\{s \in \mathbb{R} \mid F(s) \geq x\}.$$

Als Konvention benutzen wir hier $\inf \emptyset = -\infty$.

a) Zeichnet für das Beispiel $F : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{5} \mathbf{1}_{[k,\infty)}(x)$ die Funktion F^{-1}.

(2 Punkte)

b) Zeige, dass F^{-1} $(\mathcal{B}([0,1]), \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-messbar ist. *(2 Punkte)*

c) Bestimme die Verteilungsfunktion des Bildmaßes $\mathbb{P} \circ (F^{-1})^{-1}$ an. *(3 Punkte)*

Hinweis: $(F^{-1})^{-1}$ bezeichnet das Urbild der Abbildung F^{-1}. Weil die Notation schrecklich aussehen würde, nutzen wir hier eine alternative Schreibweise für das Bildmaß: Statt μ_f schreibt man manchmal auch $\mu \circ f^{-1}$.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 6. Oktober 2021, 10:00 Uhr, in Ilias abzugeben.