Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

3. Übung

Dieses Blatt beschäftigt sich mit den Vorlesungen 5-7. Besonders für die beiden letzten Aufgaben kann es sehr hilfreich sein, sich vorher schon mal Vorlesung 7 anzuschauen.

1. Fortsetzungen von Mengenfunktionen zu Maßen.

Sei

$$\mathcal{E} \coloneqq \{E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ endlich}\}$$

und die Mengenfunktion

$$\mu\colon \mathcal{E} \to [0,\infty], \quad E \mapsto 0,$$

gegeben.

a) Zeige, dass $\mathcal{E}$ ein Semiring ist und bestimme $\sigma(\mathcal{E})$. *(4 Punkte)*

b) Zeige, dass es unendlich viele verschiedene Fortsetzungen von μ zu Maßen auf $\sigma(\mathcal{E})$ gibt. Warum ist dies kein Widerspruch zu Satz 1.3.8.? *(4 Punkte)*

2. Das Lebesgue-Maß.

Sei $\mathcal{S} \coloneqq \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ und

$$\lambda\colon \mathcal{S} \to [0,\infty), \quad (a,b] \mapsto \lambda((a,b]) = b-a.$$

Setze λ mittels des Fortsetzungssatzes zu einem Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ fort. Zeige zudem, dass die Fortsetzung von λ ein unendliches Maß ist.
Hinweis: Den Beweisweg haben wir schon in der Vorlesung skizziert. Um die Details auszuarbeiten, orientiert ihr euch am besten an Satz 1.4.4 aus der Vorlesung.

(6 Punkte)

3. Diskrete Verteilungsfunktionen und Mischungen von Diracmaßen.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen reellen Zahlen, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

erfüllt ist. Die Funktion F sei definiert als

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mathbf{1}_{[a_n,\infty)}(t).$$

a) Zeige, dass F eine Verteilungsfunktion ist. *(3 Punkte)*

b) Bestimme das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_F$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *(3 Punkte)*

c) Berechne $\mathbb{P}((a, b])$ und $\mathbb{P}([a, b])$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$. Wann gilt $\mathbb{P}((a, b]) \neq \mathbb{P}([a, b])$? *(2 Punkte)*

d) Skizziere F mit $a_n = n$ und $p_n = \frac{6}{(\pi n)^2}$ für $n \in \mathbb{N}$. *(2 Punkte)*

Hinweis: Für Aufgabenteil b) könnt ihr benutzen, dass eine korrekt skalierte Mischung von Wahrscheinlichkeitsmaßen wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

4. Verteilung der Masse der Normalverteilung.

Sei das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ der Verteilung $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gegeben. Für welche σ lässt sich aus der Ungleichung (die wir bald selbst beweisen werden)

$$\int_r^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x \leq \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad r \geq 0,$$

folgern, dass

$$\mathbb{P}([-1, 1]) \geq 0,99$$

gilt?

Hinweis: Überlegt euch, warum man mit der obigen Ungleichung auch $\mathbb{P}((-\infty, 1))$ abschätzen kann.

(6 Punkte)

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 29. September 2021, 10:00 Uhr, in Ilias abzugeben.