Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

2. Übung

1. Noch mehr Spaß mit Dynkin-Systemen.

a) Sei Ω eine nicht leere Menge und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Zeige, dass das Mengensystem $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{D}$ und $A \subseteq B \implies B \backslash A \in \mathcal{D}$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ und $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

(3 Punkte)

b) Sei $|\Omega| = 2n \geq 4, n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{D} := \{D \subseteq \Omega : |D| \text{ ist gerade}\}$.

i) Zeige, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist. *(2 Punkte)*

ii) Widerlege per Gegenbeispiel, dass $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra ist. *(1 Punkt)*

iii) Zeige mit Proposition 1.2.9, dass $\mathcal{D}$ keine σ-Algebra ist. *(2 Punkte)*

2. Eigenschaften von Verteilungsfunktionen.

Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann heißt die Funktion

$$F\colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x]),$$

die Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$. Zeige, dass eine solche Verteilungsfunktion folgende Eigenschaften erfüllt:

a) $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, *(1 Punkt)*

b) F ist monoton steigend, *(2 Punkte)*

c) F ist rechtsseitig stetig, *(2 Punkte)*

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. *(2 Punkte)*

Hinweis: Das ist Stetigkeit von Maßen!

3. Erzeuger von σ-Algebren.

(a) Zeige, dass die Mengensysteme

$$\mathcal{E}_1 := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{E}_2 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\},$$

Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind. *(2 Punkte)*

Hinweis: Ihr dürft dafür das Ergebnis aus der Vorlesung nutzen, dass die Menge der offenen Intervalle in $\mathbb{R}$ auch ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist.

(b) Sei $\Omega = \{a, b, c, d\}$ und $\mathcal{E} = \{\{a, b\}, \{d\}\}$. Bestimme $\sigma(\mathcal{E})$. *(2 Punkte)*

4. Noch mehr zu Erzeugern von σ-Algebren.

Sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ und $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$. Zeige, dass

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2)) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2))$$

gilt. *(6 Punkte)*

Hinweis: Betrachtet für eine Inklusionsrichtung das Mengensystem

$$\mathcal{C} := \{B \subseteq \Omega_2 \mid f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))\}.$$

5. Semiring Trauma.

Seien $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_1)$ und $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$ zwei Semiringe und $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ σ-Algebren über Ω_1 bzw. Ω_2.

(i) Zeige, dass das Produkt von $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$, definiert als

$$\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 := \{A \times B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 \mid A \in \mathcal{S}_1, B \in \mathcal{S}_2\},$$

wieder ein Semiring ist. *(4 Punkte)*

(ii) Zeige, dass das Produkt von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ (vgl. ÜB 1 Aufgabe 1) schnittstabil ist. *(1 Punkt)*

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 22. September 2021, 10:00 Uhr, in Ilias abzugeben.