Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

1. Übung

1. Weitere Eigenschaften von σ-Algebren und Maßen.

a) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $A \in \mathcal{A}$. Zeige, dass

$$\mathcal{A}_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra über A ist.

(2 Punkte)

b) Sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ und $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra über Ω_2. Zeige, dass

$$\mathcal{A}_1 := f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \{f^{-1}(A_2) \mid A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

eine σ-Algebra über Ω_1 ist. *(2 Punkte)*

c) Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ σ-Algebren über Ω_1 und Ω_2. Zeige oder widerlege, dass das Produkt von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$, definiert als

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 := \{A \times B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 \mid A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathcal{A}_2\}$$

eine σ-Algebra über $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist. *(2 Punkte)*

d) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ beliebig. Zeige, dass die sogenannte σ-Subadditivät von Maßen gilt, also

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(4 Punkte)

2. Summen von Maßen.

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, versehen mit einer Folge von Maßen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige, dass

$$\mu := \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$$

ein Maß definiert. *(3 Punkte)*

3. Wahrscheinlichkeitsmaße.

Sei der messbare Raum $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ gegeben, versehen mit

$$\mu_1 \coloneqq c_1 \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \delta_n, \quad c_1 \in \mathbb{R}, p \in (0,1),$$

$$\mu_2 \coloneqq c_2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k, \quad c_2 \in \mathbb{R}, p \in (0,1), n \in \mathbb{N},$$

$$\mu_3 \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k \delta_k, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

wobei δ_k das Dirac-Maß in k bezeichne. Welche Forderungen müssen die Konstanten c_1, c_2 und $a_1, \ldots, a_n$ erfüllen, damit die obigen Funktionen Maße bzw. Wahrscheinlichkeitsmaße sind?
Wichtig: Ohne Begründung gibt es keine Punkte. ☺

(6 Punkte)

4. Modellierung von Zufallsexperimenten.

Aus einer Menge von vier Kugeln werden zwei blind ausgewhlt, wobei jede Kugel einer Zahl zwischen eins und vier entspricht.

(a) Modelliere einen diesem Experiment entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraum. Gebe dazu eine Menge von Elementarereignissen Ω, eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ an. *(2 Punkte)*

(b) Definiere und berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

(i) Die Summe der Kugeln ist größer als 5. *(1 Punkt)*

(ii) Das Produkt der Kugeln ist ungerade. *(1 Punkt)*

(iii) Das Produkt der Kugeln ist gerade. *(1 Punkt)*

(iv) Die Kugel Nummer drei oder die Kugel Nummer 4 wird gezogen. *(1 Punkt)*

5. Weiteres zur Stetigkeit von Maßen.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für endliche Maße μ die Eigenschaft $A_n \downarrow A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ gilt. Zeige, dass auch für beliebige Maße μ die $A_n \downarrow A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ gilt, sofern ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \geq n_0$. *(5 Punkte)*

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag, den 14. September 2021, 13:30 Uhr, in Ilias abzugeben.