Prof. Dr. Leif Döring
Leonardo Vela

Vorbereitungsskript Stochastik I

Das folgende kurze Skript dient der Wiederholung wichtiger Grundlagen der Analysis I und II. Diese Vorraussetzungen sind übersichtlich und nur mäßig schwer, dafür aber zentral für die Vorlesung der Stochastik I. Insgesamt benötigt die Vorlesung nur vergleichsweise wenig Vorwissen, dieses sollte allerdings sehr gut verstanden worden sein. Insbesondere Beweise sollten mit sauberer Notation und nachvollziehbarer Argumentation erbracht werden können. Es bleibt jedem Studierenden selbst überlassen, ob er an dieser Stelle die Möglichkeit zur Wiederholung nutzen will. Aus Erfahrung zeigt sich jedoch, dass eine gute Vorbereitung das erfolgreiche Besuchen der Vorlesung fördert.

1 Mengen

Eine Menge M heißt **Teilmenge** von N, falls für alle $x \in M$ auch $x \in N$ gilt. Man schreibt dann $M \subseteq N$. Gilt zudem $M \neq N$, so nennt man M eine echte Teilmenge von N und schreibt $M \subset N$. Die Menge aller Teilmengen einer Menge M nennt man **Potenzmenge** von M und schreibt $\mathcal{P}(M) \equiv \{A \mid A \subseteq M\}$. Insbesondere sind $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$. Für zwei Teilmengen M und N einer Grundmenge X definiert man die folgenden Mengenoperationen:

(i) **Durchschnitt** $M \cap N := \{x \in X \mid x \in M \wedge x \in N\}$

(ii) **Vereinigung** $M \cup N := \{x \in X \mid x \in M \vee x \in N\}$

(iii) **Differenz** $M \setminus N := \{x \in X \mid x \in M \wedge x \notin N\}$

(iv) **Symmetrische Differenz** $M \triangle N := (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$

Die Differenz wird auch das **Komplement** von N in M genannt. Wenn klar ist von welcher Grundmenge X die Differenz $X \setminus N$ genommen wird, so schreibt man auch $N^c := X \setminus N$ und nennt N^c das Komplement von N. Gilt $M \cap N = \emptyset$ für zwei Mengen M, N, so nennt man M und N **disjunkt**.

Ein Menge $\mathcal{M}$ deren Elemente selbst Mengen sind, wird als **Mengensystem** bezeichnet. Die Potenzmenge einer Menge ist beispielsweise ein Mengensystem. An dieser Stelle soll noch einmal genauer auf Mengensysteme eingegangen werden, da diese in der Maßtheorie eine zentrale Rolle spielen. Ein Mengensystem $\mathcal{M}$ heißt **abgeschlossen** unter einer Mengenoperation, falls für zwei beliebige Mengen A, B aus $\mathcal{M}$ die Menge, die durch die Mengenoperation, angewandt auf A und B, erzeugt wird wieder in $\mathcal{M}$ liegt. Die Potenzmenge ist beispielsweise abgeschlossen unter Durchschnitt, Vereinigung, Differenz und symmetrischer Differenz. Formal bedeutet das, dass $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, A \triangle B \in \mathcal{P}(M)$

für alle $A, B \in \mathcal{P}(M)$ gilt. Man ist natürlich nicht durch die obigen vier Mengenoperationen limitiert, sondern kann auch Abgeschlossenheit unter weiteren Verknüpfungen zweier Mengen fordern.

Für eine Familie von Teilmengen $(M_n)_{n\in I}$ mit nichtleerer Indexmenge I einer Grundmenge X definiert man weiter

$$\bigcup_{n\in I} M_n := \{x \in X \mid \text{Es existiert } n \in I, \text{ sodass } x \in A_n\}$$

und analog

$$\bigcap_{n\in I} M_n := \{x \in X \mid x \in A_n \text{ für alle } n \in I\}.$$

Dazu gelten die De Morgan'schen Rechenregeln

$$\left(\bigcup_{n\in I} M_n\right)^c = \bigcap_{n\in I} M_n^c \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{n\in I} M_n\right)^c = \bigcup_{n\in I} M_n^c.$$

2 Abbildungen

Seien X, Y zwei nichtleere Mengen. Eine **Abbildung** f von der Menge X in die Menge Y ist eine Vorschrift die jedem Element $x \in X$ ein eindeutiges Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Man schreibt

$$f : X \to Y, \ x \mapsto f(x)$$

und nennt X den **Definitionsbereich** von f und Y den **Wertebereich** von f.

Für $X' \subseteq X$ definiert $f(X') := \{f(x) \in Y | x \in X'\}$ das **Bild** von X' unter f und für $Y' \subseteq Y$ definiert $f^{-1}(Y') := \{x \in X | f(x) \in Y'\}$ das **Urbild** von X' unter f. Aufgrund der Eindeutigkeit von $f(x)$ gelten für Abbildungen insbesondere die folgenden Eigenschaften:

(i) $f^{-1}(Y) = X$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

(ii) Sei $A \subseteq Y$, dann gilt $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

(iii) Seien $A, B \subseteq Y$, dann gilt $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

(iv) Sei $(A_n)_{n\in I}$ eine Familie von Teilmengen von Y mit nichtleerer Indexmenge I, dann gilt

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right) = \bigcup_{n\in I} f^{-1}(A_n)$$

und

$$f^{-1}\left(\bigcap_{n\in I} A_n\right) = \bigcap_{n\in I} f^{-1}(A_n).$$

(v) Seien $A \subseteq B \subseteq Y$, dann gilt $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

(vi) Seien $A_1, ..., A_n$ disjunkte Teilmengen von Y, dann sind $f^{-1}(A_1), ..., f^{-1}(A_n) \subseteq X$ ebenfalls disjunkt.

Für ein Mengensystem $\mathcal{M}$ über Y (d.h. die Mengen in $\mathcal{M}$ sind Teilmengen von Y) definiert man das Urbild von $\mathcal{M}$ unter f als

$$f^{-1}(\mathcal{M}) := \{f^{-1}(M) \subseteq X \mid M \in \mathcal{M}\}.$$

Das Urbild eines Mengensystems über Y ist also ein Mengensystem über X.

Nochmals eine abschließende Bemerkung bezüglich Mengensystemen. Sei $\mathcal{M}$ ein Mengensystem und $\circ$ eine Mengenoperation. Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}$ unter $\circ$ ist äquivalent zur Wohldefiniertheit der Abbildung $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}, (A, B) \mapsto A \circ B$. Man kann eine Mengenoperation also auch als Abbildung mit Mengensystemen betrachten.

Jetzt wollen wir noch kurz ein konkretes Beispiel einer Abbildung betrachten und zwar die sogenannte Indikatorfunktion. Sei A Teilmenge einer Grundmenge X so nennt man die Abbildung

$$\mathbf{1}_A : X \to \{0,1\},\ x \mapsto \mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & : x \in A \\ 0 & : x \notin A \end{cases}$$

die **Indikatorfunktion** der Menge A. Für Indikatorfunktionen gelten insbesondere die folgenden Rechenregeln. Seien $A, B \subseteq X$, dann gilt für alle $x \in X$:

(i) $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(x)$

(ii) $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$

(iii) $\mathbf{1}_{A\setminus B}(x) = \mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$

(iv) $\mathbf{1}_{A^c}(x) = \mathbf{1}_X(x) - \mathbf{1}_A(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$

(v) $\mathbf{1}_{A\triangle B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - 2 \cdot \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$

Diese Eigenschaften können alle mit einfachen Fallunterscheidungen gezeigt werden. Es lohnt sich diese kleine Übung zu machen, um Indikatorfunktionen zu verinnerlichen.

Eine weitere, für die Stochastik 1 fundamentale Abbildung ist die sogenannte **Mengenfunktion**, also eine Abbildung die einer Menge reelle Werte zuweist. Für ein Mengensystem $\mathcal{M}$ mit $\emptyset \in \mathcal{M}$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ ist eine auf $\mathcal{M}$ definierte Mengenfunktion f eine Abbildung

$$f : \mathcal{M} \to W, M \mapsto f(M)$$

mit der Eigenschaft $f(\emptyset) = 0$. Eine Mengenfunktionen bildet also von einem Mengensystem $\mathcal{M}$ in einen reellwertigen Zielraum W ab und weist der leeren Menge immer den Wert 0 zu. Am häufigsten betrachtet man den Fall $W = [0, \infty]$. Da Mengenfunktionen in den Einführungsveranstaltungen des Mathematikstudiums weniger Anwendung finden folgen nun ein paar Beispiele zu dieser besonderen Art der Abbildungen.

Sei M eine nichtleere, endliche Menge, dann sind beispielsweise die folgenden Abbildungen Mengenfunktionen:

(i) $\alpha : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to \mathbb{N}_0, A \mapsto |A|$, die Mächtigkeit von Mengen kann also auch als Funktionswert einer Mengenfunktion aufgefasst werden, die jeder Menge die Anzahl ihrer Elemente zuweist.

(ii) $\beta : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}, A \mapsto 0$, also die Abbildung die jeder Menge den Wert 0 zuweist.

(iii) Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. $\gamma : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \gamma(A) := \begin{cases} c & : A \neq \emptyset \\ 0 & : A = \emptyset \end{cases}$, also die Abbildung die jeder nichtleeren Menge eine Konstante c zuweist.

(iv) Sei $x \in M$ beliebig. $\delta_x : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to \{0,1\}, A \mapsto \delta_x(A) := \begin{cases} 1 & : x \in A \\ 0 & : x \notin A \end{cases}$

Die Abbildungen α, β und γ sind eher einfacher Natur, die Abbildung δ_x hingegen ist anfangs weniger eingänglich. Auch hier lohnt sich eine kleine Wiederholung, um sie zu verinnerlichen.

3 Folgen

Unter einer **Folge** in einer nichtleeren Menge X versteht man eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to X,\ n \mapsto x_n$$

die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Element $x_n \in X$ zuordnet. Eine Folge ist also eine durch die Abbildung f gegebene Aufzählung von Elementen in X, wobei Elemente auch mehrfach vorkommen können. Man gibt normalerweise lediglich die Bildwerte der Abbildung f an und schreibt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für eine Folge. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine strikt monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, also $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Will man für eine Folge in einer Menge X Grenzwerte definieren, so braucht man zusätzlich eine Form des Abstands auf der Menge X. Nun werden zuerst Grenzwerte für reellwertige Folgen definiert und im Anschluss wird dazu übergegangen Grenzwerte von Folgen von Mengen zu definieren.

Eine reellwertige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent**, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

In diesem Fall nennt man a den **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man schreibt dafür dann $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent, so heißt die Folge **divergent**. Für konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ sollten die folgenden Aussagen im Kopf sein.

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$, dann gelten

(i) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so gilt $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

(ii) Gilt $|a_n - a| < \alpha_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ist die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(iii) Ist $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für zwei konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ (Monotonie von Grenzwerten).

(iv) Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$, so ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ (Sandwich-Theorem).

Man kann aber auch die Ordnung der Menge der reellen Zahlen ausnutzen, um Grenzwerte für reellwertige Folgen auf andere Weise zu definieren. Insbesondere besitzt jede beschränkte nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine eindeutige kleinste obere Schranke, das **Supremum**, und eine eindeutige größte untere Schranke, das **Infimum**. Das Supremum einer Teilmenge A von $\mathbb{R}$ notiert man mit $\sup A$, das Infimum mit $\inf A$.

Dazu definiert man für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ den **Limes inferior** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k = \sup\{\inf\{x_k \in \mathbb{R} \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

und den **Limes superior** als

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k = \inf\{\sup\{x_k \in \mathbb{R} \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Der Limes inferior ist der kleinste Grenzwert aller Teilfolgen, der Limes superior der größte Grenzwert aller Teilfolgen. Liegt für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Gleichheit des Limes inferior und des Limes superior vor, so ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Für den Limes der Folge gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Betrachten wir nun Folgen von Mengen. Für eine Folge von Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Mengensystem $\mathcal{M}$ über einer Grundmenge X kann man ein Supremum und ein Infimum folgendermaßen definieren*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{und} \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Damit kann man nun analog wie bei reellen Folgen den Limes superior und den Limes inferior einer Folge von Mengen definieren.

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{M}} \bigcap_{k\geq n} A_n$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{M}} \bigcup_{k\geq n} A_n$$

Den Limes superior und den Limes inferior kann man dann auch folgendermaßen charakterisieren:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X \mid x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X \mid \text{ Es existiert } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ sodass } x \in A_n \text{ für alle } n \geq n_0\}$$

*Ist $\mathcal{M}$ eine Potenzmenge, so existieren auf natürliche Weise Supremum und Infimum in einer Halbordnung durch Teilmengenrelation. Die Definition weicht in diesem Falle aber nicht von der allgemeinener gefassten Definition ab.

Genau wie für reelle Folgen kann man nun bei Gleichheit des Limes superior und des Limes inferior den Limes einer Folge von Mengen definieren. Falls also für eine Folge von Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ gilt, so definiert man den Limes der Folge als

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

Eine Folge von Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$ gilt, nennt man eine **monoton wachsende** Folge von Mengen. Eine Folge von Mengen $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$ gilt, nennt man eine **monoton fallende** Folge von Mengen. Für solche monotone Folgen von Mengen sind Limes inferior und Limes superior gleich, d.h. für solche Folge existiert der Limes. Dieser ist

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

falls die Folge monoton wachsend ist und

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

falls die Folge monoton fallend ist. Ist A der Grenzwert einer monoton wachsenden Folge, so schreibt man $A_n \uparrow A$. Ist A der Grenzwert einer monoton fallenden Folge, so schreibt man $A_n \downarrow A$.

Zuletzt werden noch Folgen reellwertiger Funktionen besprochen. Um auf einer Menge von Funktionen ein Supremum und Infimum zu definieren kann man erneut die Ordnungsaxiome der reellen Zahlen nutzen und punktweise eine Supremumfunktion und Infimumfunktion definieren. Dabei kann man für beliebige, aber feste x_0, im Definitionsbereich der f_n die reelle Folge $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten, für die Limes superior und Limes inferior immer existieren. Sei dafür $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Funktionen, also $f_n : X \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann definiert man punktweise

$$(\liminf_{n\to\infty} f_n)(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{und} \quad (\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Die Klammern um die Supremumfunktion und Infimumfunktion werden oftmals nicht geschrieben, wenn aus dem Kontext herausgeht, dass der Limes superior oder Limes inferior der Folge von Funktionen punktweise definiert ist. Analog wie bisher kann der Limes $\lim_{n\to\infty} f_n$ einer Funktionenfolge definiert werden, falls $\limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$.

Eine beliebige Folge reellwertiger Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend, falls $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in X, n \in \mathbb{N}$ und monoton fallend falls $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in X, n \in \mathbb{N}$. Ist f der Grenzwert einer monoton wachsenden Folge, so schreibt man $f_n \uparrow f$. Ist f der Grenzwert einer monoton fallenden Folge, so schreibt man $f_n \downarrow f$.