

Stochastik I

5. Große Übung

Prof. Dr. Leif Döring, Felix Schamoni

13.10.2021

Das Lebesgue-Integral: Einfache Funktionen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{E} := \{f : f \text{ einfache Funktion}\}$ bzw.

$\mathcal{E}^+ := \{f : f \text{ einfache positive Funktion}\}$. Hierbei heißt eine Funktion **einfach**, falls $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \bar{\mathbb{R}}$ und A_1, \dots, A_n existieren, sodass die A_k paarweise disjunkt sind mit $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$ und

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Für ein $f \in \mathcal{E}^+$ ist dann das **Lebesgue-Integral** definiert durch

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k).$$

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und f eine einfache Funktion, das heißt

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega),$$

für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und A_1, \dots, A_n eine messbare, disjunkte Zerlegung von Ω .
Zeige, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\Omega} (\alpha f) d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu.$$

Das Lebesgue-Integral: Nichtnegative, messbare Funktionen

Für eine **nichtnegative, messbare Funktion** $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ definieren wir dann das **Lebesgue-Integral** durch

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sup \left\{ \int_{\Omega} g \, d\mu : g \text{ einfach, } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Dieser Ausdruck ist erstmal unhandlich, aber direkt wohldefiniert.

Nach der Vorlesung existiert zu jeder nichtnegativen messbaren numerischen Funktion f eine Folge von einfachen Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \uparrow f$ punktweise und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu.$$

Diese äquivalente Darstellung ist deutlich praktischer für Beweise.

Aufgabe 2

Seien f, g zwei nichtnegative, messbare Funktionen mit $g \leq f$. Zeige die Monotonie des Integrals für nichtnegative Funktionen, d.h. zeige

$$\int_{\Omega} g \, d\mu \leq \int_{\Omega} f \, d\mu.$$

Nutze hierfür direkt die Definition des Integrals für nichtnegative Funktionen:

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sup \left\{ \int_{\Omega} h \, d\mu : h \text{ einfach, } 0 \leq h \leq f \right\}.$$

Aufgabe 3

Sei μ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zeige, dass für jedes $\lambda > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\mu((a, \infty)) \leq \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} d\mu(x)}{e^{\lambda a}} \quad \text{bzw.} \quad \mu((a, \infty)) e^{\lambda a} \leq \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} d\mu(x).$$

Folgende Vorüberlegungen sind sehr nützlich:

- Wie lässt sich die linke Seite als Integral über eine einfache Funktion schreiben?
- Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{\lambda a} \leq e^{\lambda x}$?

Aufgabe 4

Seien der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und das Diracmaß δ_{x_0} für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeige, dass für eine einfache Funktion $f: (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ folgendes erfüllt ist:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_{x_0} = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

