

# Stochastik I

## 4. Große Übung

---

Prof. Dr. Leif Döring, Felix Schamoni

06.10.2021

# Messbarkeit und Approximierbarkeit

- Nach Proposition 3.1.6. existiert für jede **nichtnegative messbare Funktion** eine Folge von positiven einfachen Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $f_n \uparrow f$ .
- Nach der GÜ bzw. Tutorien ist aber auch der **Grenzwert einer monoton wachsenden Folge (in  $\bar{\mathbb{R}}$ ) von positiven einfachen Funktionen** messbar, da einfache Funktionen messbar sind.
- Es besteht also eine **1:1 Korrespondenz** zwischen messbaren, nichtnegativen und durch wachsende Folgen von positiven, einfachen Funktionen approximierbaren Funktionen.
- Diese Korrespondenz gilt mit der üblichen Zerlegung  $f = f^+ - f^-$  dann auch für **allgemeine messbare numerische Funktionen** und Funktionen, deren **Positiv- und Negativteil durch wachsende Folgen von positiven, einfachen Funktionen approximierbar** sind.

# Das Lebesgue-Integral: Einfache Funktionen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $\mathcal{E} := \{f : f \text{ einfache Funktion}\}$  bzw.

$\mathcal{E}^+ := \{f : f \text{ einfache positive Funktion}\}$ . Hierbei heißt eine Funktion **einfach**, falls  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \bar{\mathbb{R}}$  und  $A_1, \dots, A_n$  existieren, sodass die  $A_k$  paarweise disjunkt sind mit  $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$  und

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Für ein  $f \in \mathcal{E}^+$  ist dann das **Lebesgue-Integral** definiert durch

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k).$$

# Das Lebesgue-Integral: Nichtnegative, messbare Funktionen

Für eine **nichtnegative, messbare Funktion**  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$  definieren wir dann das **Lebesgue-Integral** durch

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sup \left\{ \int_{\Omega} g \, d\mu : g \text{ einfach, } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Dieser Ausdruck ist erstmal unhandlich, aber direkt wohldefiniert.

Nach der Vorlesung existiert zu jeder nichtnegativen messbaren numerischen Funktion  $f$  eine Folge von einfachen Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $f_n \uparrow f$  punktweise und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu.$$

Diese äquivalente Darstellung ist deutlich praktischer für Beweise.

# Das Lebesgue-Integral: Integrierbare Funktionen

Sei  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$  eine messbare numerische Funktion. Dann sind nach der Vorlesung  $f^+ := \max\{f, 0\}$ ,  $f^- := -\min\{f, 0\}$  messbare und nichtnegative Funktionen. Falls

$$\int_{\Omega} f^+ d\mu < \infty, \quad \int_{\Omega} f^- d\mu < \infty,$$

gilt, heißt  $f$  **integrierbar** und das Lebesgue-Integral für eine integrierbare Funktion  $f$  ist definiert durch

$$\int_{\Omega} f d\mu := \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu.$$

Wir schränken uns hierbei auf integrierbare Funktionen ein, um den Fall “ $\infty - \infty$ ” zu vermeiden.

## Aufgabe 1

Sei der messbare Raum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  gegeben. Wir betrachten nun zwei verschiedene Maße auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Sei also  $\lambda$  das Lebesguemaß und  $\delta_{x_0}$  das Diracmaß in  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Berechne das Integral von

$$f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x),$$

$$g(x) = \mathbb{1}_{(a,b]}(x) \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b$$

bezüglich der beiden Maße.



## Aufgabe 2

Sei wieder der messbare Raum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  gegeben, versehen mit dem Maß

$$\mu := \delta_2 + \delta_3 + \delta_5.$$

Berechne das Integral bezüglich  $\mu$  für die folgenden Funktionen

$$f(x) := \mathbb{1}_{(2,3]}(x) + \mathbb{1}_{[5,\infty)}(x),$$

$$g(x) := \mathbb{1}_{\{2\}}(x) + \mathbb{1}_{\{3\}}(x) + \mathbb{1}_{\{5\}}(x),$$

$$h(x) := \mathbb{1}_{(-\infty,2)}(x) + \mathbb{1}_{(3,5)}(x) + \mathbb{1}_{(5,\infty)}(x).$$

Für die Schnellen: Vergleiche die Integrale mit den entsprechenden Integralen bezüglich des Lebesguemaßes  $\lambda$ . Was fällt auf? Lassen sich eure Überlegungen auch auf die erste Aufgabe übertragen?



## Aufgabe 3

Seien der messbare Raum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  und das Diracmaß  $\delta_{x_0}$  für ein festes  $x_0 \in \mathbb{R}$  gegeben. Zeige, dass für eine einfache Funktion  $f: (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$  folgendes erfüllt ist:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_{x_0} = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$



## Aufgabe 4

Seien der messbare Raum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  und das Diracmaß  $\delta_{x_0}$  für ein festes  $x_0 \in \mathbb{R}$  gegeben. Zeige, dass für eine nichtnegative, messbare Funktion  $f: (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$  folgendes erfüllt ist:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_{x_0} = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$



## Aufgabe 5

Seien der messbare Raum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  und das Diracmaß  $\delta_{x_0}$  für ein festes  $x_0 \in \mathbb{R}$  gegeben. Zeige, dass für eine integrierbare Funktion  $f: (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$  folgendes erfüllt ist:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_{x_0} = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

