a) Beh: X ist integrierbar

Bew: $\mathbb{E}[|X|]$ ist wohldefiniert, da $|X| \geq 0$ gilt.

Zudem gilt $\mathbb{E}[|X|] = \int_\Omega |X| \, d\mathbb{P} = \int_{\{|X|<1\}} |X| \, d\mathbb{P} + \int_{\{|X|\geq 1\}} |X| \, d\mathbb{P}$

$$\leq \int_{\{|X|<1\}} 1 + \int_{\{|X|\geq 1\}} |X|^2 \, d\mathbb{P}$$

$$\leq 1 + \int_\Omega X^2 \, d\mathbb{P}$$

$$= 1 + \mathbb{E}[X^2] < \infty$$

$\mathbb{1}_\Omega = \mathbb{1}_{A \cup A^c} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}$

b) Beh: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Bew: Nach a) ist X integrierbar, also $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$.

Die Varianz ist wohldefiniert, da $(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq 0$ gilt.

Mit Linearität des Erwartungswertes folgt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mathbb{E}[X]X + \mathbb{E}[X]^2]$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2\mathbb{E}[X]X] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]^2]$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

c) Beh: $\mathbb{V}(X+a) = \mathbb{V}(X)$

Bew: $\mathbb{V}(X+a) = \mathbb{E}[(X+a - \mathbb{E}[X+a])^2]$

$$= \mathbb{E}[(X + a - a - \mathbb{E}[X])^2]$$

$$= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{V}(X)$$

d) Beh: $\mathbb{V}(aX) = a^2 \mathbb{V}(X)$

Bew: $\mathbb{V}(aX) \overset{(b)}{=} \mathbb{E}[(aX)^2] - \mathbb{E}[aX]^2$

$= a^2 \mathbb{E}[X^2] - a^2 \mathbb{E}[X]^2$

$= a^2 (\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2) = a^2 \mathbb{V}(X)$

e) Beh: $\mathbb{V}(X) = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R} : X = c \quad \mathbb{P}$-f.s.

Bew: „$\Rightarrow$": Sei $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = 0$. Da $(X - \mathbb{E}[X]) \geq 0$

folgt $(X - \mathbb{E}[X]) = 0 \quad \mathbb{P}$-f.s.

$\Rightarrow X = \mathbb{E}[X] \quad \mathbb{P}$-f.s.

„$\Leftarrow$": Sei nun $X = c \quad \mathbb{P}$-f.s. für ein $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, d\mathbb{P} = \int_\Omega c \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[c] = c$

$\Rightarrow \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_\Omega (X - \mathbb{E}[X])^2 \, d\mathbb{P}$

$= \int_\Omega (c - c)^2 \, d\mathbb{P}$

$= \int_\Omega 0 \, d\mathbb{P} = 0 \qquad \square$

Geg: X diskret gleichverteilt auf $\{1, \dots, 7\}$, Y stetig verteilt mit Dichte $f(y) = c\,y(1-y)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$, $c \in \mathbb{R}$

a) **Ges:** $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathcal{M}_X$

Lsg.: Da $e^{tx} > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ gilt, ist $\mathcal{M}_X$ wohldefiniert.

Es gilt für $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{M}_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=1}^{7} \frac{1}{7} e^{tk} = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{7} e^{tk}$$

$\Longrightarrow \mathcal{M}_X(t) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\overset{VL}{\Longrightarrow} \mathbb{E}[X^k] = \mathcal{M}_X^{(k)}(0) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

- Es gilt $\mathcal{M}_X'(t) = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{7} k e^{tk}$, also ist

$$\mathbb{E}[X] = \mathcal{M}_X'(0) = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{7} k e^{0k} = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{7} k = \frac{1}{7} \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} = 4$$

- Es gilt $\mathcal{M}_X''(t) = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{7} k^2 e^{tk}$, also ist

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathcal{M}_X''(0) = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{7} k^2 e^{0k} = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{7} k^2 = \frac{140}{7} = 20$$

Mit der Verschiebungsformel folgt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 20 - 4^2 = 20 - 16 = 4$$

b) **Ges:** c, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{V}(Y)$, $\mathcal{M}_Y$ $\qquad f(y) = c\,y(1-y)\,\mathbb{1}_{[0,1]}$

Lsg: Da Y eine ZV ist muss $\mathbb{P}(Y \in \mathbb{R}) = 1$ gelten.

$$\Rightarrow 1 = \mathbb{P}(Y \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} c\,y(1-y)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,dy$$

$$= c \int_0^1 y(1-y)\,dy = c\left[\tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^1$$

$$= c\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{6} c$$

$\Rightarrow c = 6$

Da $y \cdot f(y)$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist, gilt $y \cdot f(y) \in L^1(\mathbb{R})$. Also ist $\mathbb{E}[Y]$ wohldefiniert und es gilt nach der VL:

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y f(y)\, dy = 6\int_0^1 y^2(1-y)\, dy$$

$$= 6\int_0^1 y^2 - y^3\, dy$$

$$= 6\left[\tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4\right]_0^1$$

$$= 6\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{2}$$

$y^2 \cdot f(y) \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[Y^2]$ ist wohldefiniert und es gilt:

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{\mathbb{R}} y^2 f(y)\, dy = 6\int_0^1 y^3(1-y)\, dy$$

$$= 6\int_0^1 y^3 - y^4\, dx$$

$$= 6\left[\tfrac{1}{4}y^4 - \tfrac{1}{5}y^5\right]_0^1$$

$$= 6\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\right) = \tfrac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \tfrac{3}{10} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{20}$$

$e^{ty} f(y) \geq 0$ und damit ist $\mathbb{E}[e^{tY}]$ wohldefiniert

Es gilt für $t \neq 0$:

$$\mathcal{M}_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \int_{\mathbb{R}} e^{ty} f(y)\, dy$$

$$= \int_0^1 6e^{ty} y(1-y)\, dy$$

$$= \int_0^1 6e^{ty} y\, dy - \int_0^1 6e^{ty} y^2\, dy$$

Jeweils mit partielle Integration:

$$\int_0^1 e^{ty} y \, dy = \left[\frac{1}{t} e^{ty} y\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t} e^{ty} \, dy$$

$$= \frac{1}{t} e^t - \left[\frac{1}{t^2} e^{ty}\right]_0^1 = \frac{1}{t} e^t - \frac{1}{t^2} e^t + \frac{1}{t^2}$$

$$\int_0^1 y^2 e^{ty} \, dy = \left[y^2 \frac{1}{t} e^{ty}\right]_0^1 - \int_0^1 2y \frac{1}{t} e^{ty} \, dy$$

$$= \frac{1}{t} e^t - 2 \frac{1}{t} \int_0^1 y e^{ty} \, dy$$

$$= \frac{1}{t} e^t - 2 \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} e^t - \frac{1}{t^2} e^t + \frac{1}{t^2}\right)$$

$$\Rightarrow M_Y(t) = \int_0^1 6 e^{ty} y \, dy - \int_0^1 6 e^{ty} y^2 \, dy$$

$$= 6 \left(\int_0^1 e^{ty} y \, dy - \int_0^1 e^{ty} y^2 \, dy\right)$$

$$= 6 \left(\cancel{\frac{1}{t} e^t} - \frac{1}{t^2} e^t + \frac{1}{t^2} - \cancel{\frac{1}{t} e^t} + \frac{2}{t}\left(\frac{1}{t} e^t - \frac{1}{t^2} e^t + \frac{1}{t^2}\right)\right)$$

$$= 6 \left(-\frac{1}{t^2} e^t + \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^2} e^t - \frac{2}{t^3} e^t + \frac{2}{t^3}\right)$$

$$= 6 \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} e^t - \frac{2}{t^3} e^t + \frac{2}{t^3}\right)$$

$$= 6 \left(\frac{t + e^t t - 2e^t + 2}{t^3}\right)$$

und $M_Y(0) = \mathbb{E}[e^{0Y}] = 1$

$$\Rightarrow M_Y(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \dfrac{6(2 + t + e^t(t-2))}{t^3}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beh.: i) $\Longleftrightarrow$ ii) $\Longleftrightarrow$ iii)

Bew.:

- i) $\Longleftrightarrow$ ii): Gilt nach Definition diskreter Zufallsvariablen
- i) $\Longleftrightarrow$ iii):

$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n\geq 1} f(a_n) \cdot p_n$

„$\Longrightarrow$": Gilt nach Satz 3.3.3 aus Skript / VL

„$\Longleftarrow$": Sei $t \in \mathbb{R}$. Wähle $\overset{\text{f Indikatorfkt}}{f(x)} = \mathbb{1}_{(-\infty,t]}(x)$

$\Rightarrow$ f ist positiv und messbar

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \leq t\}}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(-\infty,t]}(X)] \\
&\overset{\text{iii)}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{(-\infty,t]}(a_n)\, p_n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{[a_n,\infty)}(t)\, p_n
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow F_X$ ist eine diskrete Verteilungsfunktion

(i) ZV X ist diskret

(ii) $\mathbb{P}_X$ ist diskretes W-Maß

(iii) $\exists\, (a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ und $(p_n)_{n\geq 1} \subset [0,1]$ mit $\sum_{n\geq 1} p_n = 1$,
sodass für alle messbare, pos. Fkt f gilt:

$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(a_n)\, p_n$

$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

Ges: $\mathbb{E}[X]$, $V(X)$, $\mathcal{M}_X$

Lsg:

Es gilt $\mathbb{P}_X((-\infty, 0]) = 0$, also gilt $X = X \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}$ $\mathbb{P}_X$-f.s. und damit ist $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{(0,\infty)}]$ wohldefiniert, da $X \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)} \geq 0$.

Nach VL gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^\alpha e^{-\beta x}\, dx$$

Substitution $y = \beta x$, $\frac{dy}{dx} = \beta$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{\beta} dy$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \left(\frac{y}{\beta}\right)^\alpha e^{-y} \frac{1}{\beta}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y}\, dy$$

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta} \Gamma(\alpha+1) = \frac{1}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} \frac{1}{\beta} \alpha \cancel{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Da $X^2 \geq 0$ ist $\mathbb{E}[X^2]$ wohldefiniert. Mit der gleichen Substitution folgt

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\beta x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \int_0^\infty \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha+1} e^{-y} \frac{1}{\beta}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty y^{\alpha+1} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^2} \Gamma(\alpha+2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\beta^2} (\alpha+1) \Gamma(\alpha+1)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} \frac{1}{\beta^2} (\alpha+1) \alpha \cancel{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Da $e^{\lambda x} \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{E}[e^{\lambda X}]$ wohldefiniert und für $\lambda < \beta$ gilt:

$$M_X(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\, dx$$

Substitution:

$y = (\beta-\lambda)x$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{\beta-\lambda} dy$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\beta-\lambda)x}\, dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\beta-\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{1}{\beta-\lambda}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \left(\frac{1}{\beta-\lambda}\right)^\alpha \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} \left(\frac{\beta}{\beta-\lambda}\right)^\alpha \cancel{\Gamma(\alpha)} = \left(\frac{\beta}{\beta-\lambda}\right)^\alpha$$

Für $\lambda \geq \beta$ gilt $-(\beta-\lambda) \geq 0 \Rightarrow e^{-(\beta-\lambda)x} \geq 1 \ \forall x \geq 0$

$$\Rightarrow M_X(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\beta-\lambda)x}\, dx$$

$$\geq \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, dx = \infty$$

Zusammen:

$$\Rightarrow M_X(\lambda) = \begin{cases} \left(\frac{\beta}{\beta-\lambda}\right)^\alpha, & \lambda < \beta \\ \infty, & \lambda \geq \beta \end{cases}$$

$\square$