Minkowski-Ungleichung: $f, g \in \mathcal{L}^p$: $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ Induktion → Für $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}^p$:

$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

$$\left\|\sum_{k=1}^n f_k\right\|_p \le \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p$$

$$\Longleftrightarrow \left(\int_\Omega \left|\sum_{k=1}^n f_k\right|^p d\mu\right)^{1/p} \le \sum_{k=1}^n \left(\int_\Omega |f_k|^p d\mu\right)^{1/p}$$

Geg: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $p \ge 1$

Beh: $$\left(\int_\Omega \left|\sum_{n=1}^\infty f_n\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{n=1}^\infty \left(\int_\Omega |f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Bew: Mit der Dreiecksungleichung für endliche Summen gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^n f_k\right| \le \sum_{k=1}^n |f_k| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Monotonie des Grenzwertes $$\Longrightarrow \left(\left|\sum_{k=1}^\infty f_k\right|\right)^p \le \left(\sum_{k=1}^\infty |f_k|\right)^p$$

Monotonie des Integrals $$\Longrightarrow \left(\int_\Omega \left(\left|\sum_{n=1}^\infty f_n\right|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^\infty |f_n|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad (*)$$

$\int |f_n|^p d\mu < \infty$

Da $f_n \in \mathcal{L}^p$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ist auch $|f_n| \in \mathcal{L}^p$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Mit MCT und der Minkowski-Ungleichung für endlich viele Summanden gilt:

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^\infty |f_n|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n |f_k|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N |f_n|^p$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^n \left(\int_\Omega |f_k|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \left(\int_\Omega |f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Zusammen gilt also mit $*$)

$$\left(\int_\Omega \left(\left|\sum_{n=1}^\infty f_n\right|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{n=1}^\infty \left(\int_\Omega |f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad \square$$

$$\left\|\sum_{n=1}^\infty f_n\right\|_p \qquad \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p$$

Geg: Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $p \geq 1$.

$f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\int_\Omega |f_n - f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{= \|f_n - f\|_p} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |f_n - g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Beh: $f = g$ μ-f.ü. und Grenzwerte von von Folgen in L^p eindeutig

Bew: Falls $\int_\Omega |f-g|^p d\mu = 0$, so gilt $|f-g|^p = 0$ μ-f.ü.

und damit $f = g$ μ-f.ü. Wir schätzen den Ausdruck wie folgt ab:

$$0 \leq \left(\int_\Omega |f-g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f - \overbrace{f_n + f_n}^{=0} - g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f - f_n + f_n - g\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n - g\|_p$$

Minkowski

$$\leq \underbrace{\left(\int_\Omega |f - f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{\left(\int_\Omega |f_n - g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left(\int_\Omega |f-g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(\int_\Omega |f-g|^p d\mu\right)^{1/p} = 0 \Rightarrow \int_\Omega |f-g|^p d\mu = 0$$

$$\Longrightarrow f = g \ \mu\text{-f.ü.}$$

Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, also eine Folge von Äquivalenzklassen von Funktionen in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sodass $[f] = [g] \Leftrightarrow f = g$ μ-f.ü. Falls für eine Folge von Repräsentanten dieser Äquivalenzklassen $\left(\int_\Omega |f_n - f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$, $n\to\infty$ gilt für ein $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gilt somit auch $\left(\int_\Omega |\hat{f}_n - f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$, $n\to\infty$ für jede andere Folge von Repräsentanten $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da $|f_n - f| = |\hat{f}_n - f|$ μ-f.ü. $\forall n \in \mathbb{N}$.

$f_n = \tilde{f}_n$ μ-f.ü.

Wir haben bereits gezeigt, dass

$$\left(\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ und } \left(\int_\Omega |f_n - g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow$ $f = g$ μ-f.ü. $\Rightarrow$ $[f] = [g]$

$\Rightarrow$ Grenzwerte in L^p (!) sind eindeutig $\square$

Geg: Sei $(a_{k,n})_{k,n\in\mathbb{N}}$ eine reellwertige Folge mit $a_{k,n} \geq 0$ $\forall k,n \in \mathbb{N}$

Beh: $$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}$$

Bew: Definiere $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mu_1 = \mu_2$ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dann ist $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die Produkt-σ-Algebra auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ und $\mu_1 \otimes \mu_2$ das Produktmaß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Definiere

$$f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0},\ (k,n) \mapsto a_{k,n}$$

f ist messbar, denn $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt $f^{-1}(B) \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$

Zudem ist $f \geq 0$

Mit Fubini gilt daher

$$\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f \, d\mu_1\otimes\mu_2 = \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f_k(n)\, d\mu_2(n)\right) d\mu_1(k)$$

$$\overset{\text{Flip}}{=} \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f_n(k)\, d\mu_1(k)\right) d\mu_2(n)$$

Für die Integrale der rechten Seite gilt

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f_n(k)\, d\mu_1(k)\right) d\mu_2(n)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}$$

$$= \cancel{\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} a_{k,n} \, d\mu_1(k) \right) d\mu_2(n)}$$

$$= \int_{\mathbb{N}} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}}_{:= g(n)} \, d\mu_2(n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}$$

Analog folgt:

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f_k(n) \, d\mu_2(n) \right) d\mu_1(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} \qquad \square$$

Falls μ Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$:

$$\int f(x) \, d\mu(x) = \sum_{x=1}^{\infty} f(x)$$

Geg: $X_1 \sim \mathcal{U}((0,1))$ und $X_2 \sim \mathcal{U}([0,1])$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

a) Beh: X_1 und X_2 sind identisch verteilt

Bew: Hier reicht zu zeigen, dass $F_{X_1} = F_{X_2}$ gilt.

Vorab noch die Bemerkung, dass einelementige Menge Lebesgue-Maß 0 haben, also $\lambda(\{x\}) = x - x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$P_X(B) := P(X \in B)$

Sei $t \in \mathbb{R}$ bel.

$$F_{X_2}(t) = \mathbb{P}(X_2 \leq t) = \mathbb{P}(X_2^{-1}((-\infty, t])) = \mathbb{P}_{X_2}((-\infty, t])$$
$$= \int_{-\infty}^{t} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, dx$$

Ändern wir nun den Integranden auf eine Nullmenge $\{0\} \cup \{1\}$ (Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen) zu $\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$.

Das Integral ändert sich nicht, da $\mathbb{1}_{(0,1)} = \mathbb{1}_{[0,1]}$ λ-f.ü. (siehe letzes Übungsblatt). Also folgt

$$= \int_{-\infty}^{t} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)\, dx = \mathbb{P}_{X_1}((-\infty, t])$$
$$= \mathbb{P}(X_1^{-1}((-\infty, t])) = \mathbb{P}(X_1 \leq t) = F_{X_1}(t)$$

$\Rightarrow$ X_1 und X_2 sind identisch verteilt

b) Beh: Y_1 und Y_2 sind identisch verteilt und $Y_1 \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$

$Y_1 = -\frac{1}{\lambda} \log(X_1)$

$Y_2 = -\frac{1}{\lambda} \log(X_2)$

$\lambda > 0$

Bew: Wir rechnen die VF diesmal konkret aus.

Sei $t \in \mathbb{R}$ bel.

$$F_{Y_1}(t) = \mathbb{P}(Y_1 \leq t) = \mathbb{P}\left(-\tfrac{1}{\lambda} \log(X_1) \leq t\right)$$
$$= \mathbb{P}(-\log(X_1) \leq \lambda t)$$
$$= \mathbb{P}(\log(X_1) \geq -\lambda t)$$
$$= \mathbb{P}(\{\omega : \log(X_1(\omega)) \geq -\lambda t\})$$
$$= \mathbb{P}(\{\omega : X_1(\omega) \geq e^{-\lambda t}\})$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \geq e^{-\lambda t})$$

σ-Add.

$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq e^{-\lambda t})$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{e^{-\lambda t}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx$$

$$= 1 - \begin{cases} 0, & e^{-\lambda t} < 0 \\ e^{-\lambda t}, & 0 \leq e^{-\lambda t} \leq 1 \\ 1, & e^{-\lambda t} > 1 \end{cases}$$

Da $e^{-\lambda t} \geq 0$ kann der erste Fall weggelassen werden

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & 0 \leq e^{-\lambda t} \leq 1 \\ \cancel{1}\,0, & e^{-\lambda t} > 1 \end{cases}$$

$$F_{Y_2}(t) = \mathbb{P}(Y_2 \leq t) = \mathbb{P}(-\tfrac{1}{\lambda}\log(X_2) \leq t)$$

$$= \mathbb{P}(-\log(X_2) \leq \lambda t)$$

$$= \mathbb{P}(\log(X_2) \geq -\lambda t)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_2 \leq e^{-\lambda t})$$

Da das Integral sich wieder nur auf einer Nullmenge unterscheidet bleibt die Rechnung gleich

$$= 1 - \int_{-\infty}^{e^{-\lambda t}} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)\,dx$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & 0 \leq e^{-\lambda t} \leq 1 \\ \cancel{1}\,0, & e^{-\lambda t} > 1 \end{cases}$$

~~Da~~ $\cancel{F}$

$Y \sim Exp(\lambda)$

$$\Rightarrow F_{Y_1}(t) = F_{Y_2}(t) = (1 - e^{-\lambda t})\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) = F_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow Y_1 \sim Exp(\lambda) \text{ und } Y_2 \sim Exp(\lambda)$$

$X \sim \mathrm{Poi}(3.2)$, also $\mathbb{P}_X = e^{-3,2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3,2^k}{k!} \delta_k$

Ges: $\mathbb{P}(X=0)$, $\mathbb{P}(X \in (2,4])$, $\mathbb{P}(X > 5)$

Lsg:

- $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\})$

$$= \mathbb{P}(X^{-1}(\{0\})) \qquad \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

$$= \mathbb{P}_X(\{0\})$$

$$= e^{-3,2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3,2)^k}{k!} \delta_k(\{0\})$$

$$= e^{-3,2} \frac{3,2^0}{0!} = e^{-3,2} \approx 0,0408$$

- $\mathbb{P}(X \in (2,4]) = \mathbb{P}(X^{-1}((2,4]))$

$$= \mathbb{P}_X((2,4])$$

$$= e^{-3,2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3,2)^k}{k!} \delta_k((2,4])$$

$$= e^{-3,2} \left(\frac{3,2^3}{3!} + \frac{3,2^4}{4!} \right)$$

$$\approx 0,4007$$

- $\mathbb{P}(X > 5) = \mathbb{P}(X^{-1}((5,\infty)))$

$$= \mathbb{P}_X((5,\infty))$$

$$= 1 - \mathbb{P}_X((-\infty,5])$$

$$= 1 - e^{-3,2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3,2^k}{k!} \delta_k((-\infty,5])$$

$$= 1 - e^{-3,2} \left(1 + 3,2 + \frac{3,2^2}{2!} + \frac{3,2^3}{3!} + \frac{3,2^4}{4!} + \frac{3,2^5}{5!} \right) \approx 0,1054$$