Vor: • $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum
• $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Nullmengen
• $f,g: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar

a) Beh: $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ ist Nullmenge (d.h. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n) = 0$)

Bew: Es gilt $\mu(N_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\mu \geq 0$.
Mit der Subadditivität von Maßen folgt
$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = 0 \quad \square$$

b) Beh: $f \leq g \Rightarrow \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$

Bew: Die Nullfunktion ist eine nicht negative einfache Funktion und damit gilt.
$$\int_\Omega 0 \, d\mu = 0 \cdot \mu(\Omega) = 0.$$ Da $g - f \geq 0$ — nichtnegativ, messbar, numerisch
braucht man als nur noch Monotonie des Integrals für positive Funktionen. Diese erhält man über Monotonie des Integrals einfacher Funktionen und MCT, also nach 3.16 ex. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ mit $h_n \uparrow g - f$ und es gilt $0 \leq h_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann folgt
$$\int_\Omega 0 \, d\mu \leq \int_\Omega h_n \, d\mu$$ und über Grenzwertbildung
$$\int_\Omega 0 \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n \, d\mu \overset{\substack{\text{MCT} \\ \text{für } \mathcal{E}^+}}{=} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} h_n \, d\mu = \int_\Omega g - f \, d\mu$$
$$\Rightarrow 0 = \int_\Omega 0 \, d\mu \leq \int_\Omega g - f \, d\mu \overset{\text{Lin.}}{=} \int_\Omega g \, d\mu - \int_\Omega f \, d\mu$$
$$\Rightarrow \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$$
$\square$

c) Beh.: $f \leq g$ μ-f.ü. $\Longrightarrow \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$

Bew.: Per Konstruktion gilt

$$f(\omega) \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}(\omega) \leq g(\omega) \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega .$$

$f = h$ μ-f.ü.
$\Rightarrow \int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega h \, d\mu$

Zudem gilt $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} \, d\mu$ und $\int_\Omega g \, d\mu = \int_\Omega g \cdot \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} \, d\mu$,
da sich die Integranden nur auf Nullmengen unterscheiden.
Nach b) gilt $\int_\Omega f \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} \, d\mu \leq \int_\Omega g \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} \, d\mu$ und damit

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} \, d\mu \leq \int_\Omega g \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu \qquad \square$$

d) Beh.: $f < g$ μ-f.ü. $\not\Rightarrow \int_\Omega f \, d\mu < \int_\Omega g \, d\mu$

Bsp. Sei $\mu \equiv 0$, das Nullmaß also $\mu(A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$.
Dann gilt für alle $f < g$ μ-f.ü., dass

$$\int_\Omega f \, d\mu = 0 = \int_\Omega g \, d\mu$$

e) Beh.: $\int_{E_1 \cup E_2} f \, d\mu = \int_{E_1} f \, d\mu + \int_{E_2} f \, d\mu$, falls $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$

Bew.:

$$\int_{E_1 \cup E_2} f \, d\mu \overset{\text{Def.}}{=} \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_{E_1 \cup E_2} \, d\mu = \int_\Omega f \mathbb{1}_{E_1} + f \mathbb{1}_{E_2} \overbrace{- f \mathbb{1}_{E_1 \cap E_2}}^{=0} \, d\mu$$

$$= \int_\Omega f \mathbb{1}_{E_1} + f \mathbb{1}_{E_2} \, d\mu \overset{\text{Lin}}{=} \int_\Omega f \mathbb{1}_{E_1} \, d\mu + \int_\Omega f \mathbb{1}_{E_2} \, d\mu$$

$$\overset{\text{Def}}{=} \int_{E_1} f \, d\mu + \int_{E_2} f \, d\mu \qquad \square$$

f) **Bel:** $\int_{E_1} f \, d\mu \le \int_{E_2} f \, d\mu$ gilt <u>nicht</u> im Allgemeinen mit $E_1 \subseteq E_2$, $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$

Bsp. Betrachte $\overbrace{[0,1]}^{E_1} \subseteq \overbrace{[0,2]}^{E_2}$ und $f \in \mathcal{E}$

mit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(x) - \mathbb{1}_{(1,2]}(x)$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar.

$$\int_{[0,1]} f \, dx = 1 \cdot \lambda([0,1]) = 1 > 1 \cdot \lambda([0,1]) + (-1) \cdot \lambda((1,2])$$

$$= \int_{[0,2]} f \, dx = \int_\Omega \mathbb{1}_{[0,2]}(x) (\mathbb{1}_{[0,1]}(x) - \mathbb{1}_{(1,2]}(x)) \, dx$$

$$= \int_\Omega \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \, dx + \int_\Omega -1 \cdot \mathbb{1}_{(1,2]}(x) \, dx$$

g) **Bel:** $f \ge 0$ messbar und $\int_\Omega f \, d\mu < \infty \Rightarrow f < \infty$ μ-fast überall

Bew: Angenommen $\mu(\{f = \infty\}) > 0$

Prinzip des guten Indikators

$$\Rightarrow \int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_{\{f=\infty\}} + f \, \mathbb{1}_{\{f<\infty\}} \, d\mu$$

$$= \int_\Omega f \, \mathbb{1}_{\{f=\infty\}} \, d\mu + \underbrace{\int_\Omega f \, \mathbb{1}_{\{f<\infty\}} \, d\mu}_{\ge 0, \text{ da } f \ge 0}$$

$$= \int_{\{f=\infty\}} \infty \, d\mu + \int_{\{f<\infty\}} f \, d\mu$$

$$\overset{\text{Def } \int \text{ für } \mathcal{E}^+}{=} \infty \cdot \underbrace{\mu(\{f=\infty\})}_{>0} + \underbrace{\int_{\{f<\infty\}} f \, d\mu}_{\ge 0} = \infty \quad ⚡$$

$\Rightarrow \mu(\{f=\infty\}) = 0 \Rightarrow f < \infty$ μ-f.ü.

Vor:
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : \Omega \to [0,\infty]$ Folge nichtnegativer messbarer Funktionen

Beh:
$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

Bew: Sei $g_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$g_n \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ und $g_n \geq 0$, da $f_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Mit dem Satz der Monotonen Konvergenz folgt

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\mu \overset{\text{Def.}}{=} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu \overset{\text{MCT}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu$$

$= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \, d\mu$

$$\overset{\text{Def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} f_k \, d\mu$$
$$\overset{\text{Lin.}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega f_k \, d\mu$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega f_k \, d\mu \qquad \square$$

(Diese Beh. wird auch Satz von Beppo Levi genannt)

Vor: $\cdot (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum mit μ endlich
$\cdot f : \Omega \to [0, \infty]$ positiv, messbar, numerisch

a) Beh: $f(\omega) \in \mathbb{N}_0 \ \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \int_\Omega f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f \geq n\})$

Bew: Sei $\omega \in \Omega$ bel. $\Rightarrow \exists! \, n_0 \in \mathbb{N}_0 : f(\omega) = n_0$

Dann gilt

$$f(\omega) = n_0 \iff \omega \in \{\omega \in \Omega \mid \overset{f(\omega) = n_0 \geq n}{f(\omega) \geq n}\} \ \forall n \leq n_0$$

$$\text{und } \omega \notin \{\omega \in \Omega \mid \overset{f(\omega) = n_0 < n}{f(\omega) \geq n}\} \ \forall n > n_0$$

$$\iff \omega \in \{f \geq n\} \ \forall n \leq n_0 \text{ und } \omega \notin \{f \geq n\} \ \forall n > n_0$$

$$\iff \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}(\omega) = 1 \ \forall n \leq n_0 \text{ und } \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}(\omega) = 0 \ \forall n > n_0$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}(\omega) = n_0$$

Damit gilt $f = \sum_{n=1}^{\infty} n \, \mathbb{1}_{\{f = n\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}$.

Dann folgt mit Beppo Levi

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{f \geq n\}} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{\{f \geq n\}} \, d\mu \overset{\text{Def } \int \text{ für } \mathcal{E}^+}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f \geq n\})$$

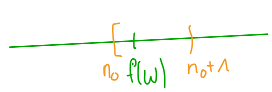
□

b) Beh: f μ-integrierbar $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f \geq n\}) < \infty$

Bew: Da $f \geq 0$ gilt $f^+ = f$ und $f^- = 0$. Also gilt

$$f \ \mu\text{-integrierbar} \iff \int_\Omega f^+ \, d\mu < \infty, \text{ da } \int_\Omega 0 \, d\mu = 0 < \infty$$

Für $\omega \in \Omega$ bel $\exists! \, n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \leq f(\omega) < n_0 + 1$.



• für $n=1,\dots,n_0$: $\mathbb{1}_{\{f\geq n\}}=1$

• für $n=n_0+1$: $\mathbb{1}_{\{f\geq n_0+1\}}=0$

Dann gilt $n_0 \leq f(\omega) < n_0+1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{f\geq n\}}(\omega) = n_0$

$$\overset{\text{Indexverschiebung}}{\iff} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{f\geq n\}}(\omega) = n_0+1$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{f\geq n\}} \leq f \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{f\geq n\}}$. Mit Monotonie des Integrals folgt

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{f\geq n\}}\,d\mu \leq \int_\Omega f\,d\mu \leq \int_\Omega \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{f\geq n\}}\,d\mu$$ und mit Beppo Levi

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{\{f\geq n\}}\,d\mu \leq \int_\Omega f\,d\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{\{f\geq n\}}\,d\mu$$

$$\overset{\text{Def } \int \text{ für } \mathcal{E}^+}{\iff} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f\geq n\}) \leq \int_\Omega f\,d\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\{f\geq n\})$$

„$\Rightarrow$": i) Falls f μ-integrierbar folgt $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{f\geq n\}) \leq \int_\Omega f\,d\mu < \infty$.

„$\Leftarrow$": ii) Falls $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{f\geq n\}) < \infty$, so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(\{f\geq n\}) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f\geq n\})}_{<\infty} + \underbrace{\mu(\{f\geq 0\})}_{<\infty} < \infty$$

Da μ endlich folgt $\mu(\{f\geq 0\}) = \mu(\Omega) < \infty$. Damit folgt

$$\int_\Omega f\,d\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\{f\geq n\}) < \infty \Rightarrow f\ \mu\text{-integrierbar.} \quad \square$$

Wäre μ nicht endlich würde die Abschätzung in ii) nicht funktionieren. Dann würde nur eine Richtung der Äquivalenz gelten.

<u>Vor:</u> $\cdot\ \mathbb{P}_1 = \mathrm{Ber}(p),\ p\in(0,1)$, d.h. $\mathbb{P}_1 := p\cdot\delta_1 + (1-p)\cdot\delta_0$

$\cdot\ \mathbb{P}_2 = \mathrm{Exp}(\lambda),\ \lambda>0$

$\cdot\ \mathbb{P}_3 = \mathcal{U}([a,b]),\ a<b\in\mathbb{R}$

a) <u>Ges:</u> k-te Momente für $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$ $\forall k\in\mathbb{N}$, d.h. $\int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mathbb{P}_i(x),\ i=1,2,3$

<u>Bew:</u> Da die Funktion $x\mapsto x^k,\ k\in\mathbb{N}$ stetig ist, ist sie $\mathcal{B}(\mathbb{R})-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar, d.h. die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} (x^k)^+ \, d\mathbb{P}_i \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} (x^k)^- \, d\mathbb{P}_i$$

sind für $i\in\{1,2,3\}$ und alle $k\in\mathbb{N}$ wohldefiniert.

- $\mathbb{P}_1$: Wir zeigen, dass für eine $\mathbb{P}_1$-integrierbare Funktion f $\qquad \mathbb{P}_1 := p\,\delta_1 + (1-p)\,\delta_0$

$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_1 = p f(1) + (1-p) f(0)$ gilt.

Sei dazu f eine $\mathbb{P}_1$ integrierbare Funktion und wir definieren $g: \mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}},\ x\mapsto f(1)\mathbb{1}_{\{1\}}(x) + f(0)\mathbb{1}_{\{0\}}(x)$

Dann gilt $\{0,1\}\subseteq\{f=g\}$ $\quad$ d.h. $f(0)=g(0) \wedge f(1)=g(1)$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{R}\setminus\{0,1\}}_{=\{0,1\}^c} \supseteq \underbrace{\mathbb{R}\setminus\{f=g\}}_{=\{f=g\}^c} = \{f\neq g\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_1(\{f\neq g\}) \leq \mathbb{P}_1(\{0,1\}^c) \overset{\text{Def } \mathbb{P}_1}{=} p\,\overbrace{\delta_1(\{0,1\}^c)}^{=0} + (1-p)\,\overbrace{\delta_0(\{0,1\}^c)}^{=0} = 0$$

$\Rightarrow f=g$ $\mathbb{P}_1$-fast überall (fast sicher)

$\Rightarrow g$ ist $\mathbb{P}_1$-integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_1 \overset{f=g\ \mathbb{P}_1\text{-f.ü.}}{=} \int_{\mathbb{R}} g \, d\mathbb{P}_1 = \int_{\mathbb{R}} f(1)\mathbb{1}_{\{1\}}(x) + f(0)\mathbb{1}_{\{0\}}(x) \, d\mathbb{P}_1(x) \quad = f(1)\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{1\}}(x)\,d\mathbb{P}_1(x) + f(0)\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{0\}}(x)\,d\mathbb{P}_1(x)$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} f(1)\mathbb{P}_1(\{1\}) + f(0)\mathbb{P}_1(\{0\})$$

$$\overset{\text{Def } \mathbb{P}_1}{=} f(1)\big(p\underbrace{\delta_1(\{1\})}_{=1} + (1-p)\underbrace{\delta_0(\{1\})}_{=0}\big) + f(0)\big(p\underbrace{\delta_1(\{0\})}_{=0} + (1-p)\underbrace{\delta_0(\{0\})}_{=1}\big)$$

$$= p f(1) + (1-p) f(0)$$

$f(1) = (1^k)^- = 1^- = 0$

$\|$ $\quad = f(0) = (0^k)^- = 0^k$

Dann gilt $\int_{\mathbb{R}} \underbrace{(x^k)^-}_{f(x)} d\mathbb{P}_1(x) = 0 \cdot p + 0^k (1-p) = 0$

$$\int_{\mathbb{R}} (x^k)^+ d\mathbb{P}_1(x) = (1^k) p + 0^k (1-p) = p$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mathbb{P}_1(x) = p \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

- $\mathbb{P}_2$: Nach der VL gilt $\qquad \mathbb{P}_2 = \operatorname{Exp}(\lambda)$

$$\int_{\mathbb{R}} (x^k)^- \, d\mathbb{P}_2(x) = \int_{\mathbb{R}} (x^k)^- \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 0 \, dx = 0,$$ da $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ die Dichte von $\operatorname{Exp}(\lambda)$ ist und $(x^k)^- = 0 \ \forall x \geq 0$ und $\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) = 0 \ \forall x < 0$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mathbb{P}_2(x)$ ist wohldefiniert und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mathbb{P}_2(x) = \int_{\mathbb{R}} (x^k)^+ \, d\mathbb{P}_2(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (x^k)^+ \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \, dx$$

$$= \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$

Jetzt: Mit Induktion zeigen, dass $\int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{k!}{\lambda^k} \ \forall k \in \mathbb{N}$

<u>IA:</u> $k=1$: $\int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx \overset{\text{part. Int.}}{=} [x(-e^{-\lambda x})]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\lambda x}) \, dx$

$$= 0 - 0 + \int_0^\infty e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1!}{\lambda^1}$$

<u>IV:</u> Die Beh. gelte für bel, aber festes $k \in \mathbb{N}$.

<u>IS:</u> $\int_0^\infty x^{k+1} \lambda e^{-\lambda x} dx \overset{\text{part. Int.}}{=} [x^{k+1}(-e^{-\lambda x})]_0^\infty - \int_0^\infty (k+1) x^k (-e^{-\lambda x}) \, dx$

$$\overset{\text{Lin}}{=} 0 - 0 + (k+1)\int_0^\infty x^k \; e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \frac{(k+1)}{\lambda}\int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$\overset{\text{IV}}{=} \frac{(k+1)}{\lambda} \cdot \frac{k!}{\lambda^k} = \frac{(k+1)k!}{\lambda \cdot \lambda^k} = \frac{(k+1)!}{\lambda^{k+1}}$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mathbb{P}_2(x) = \frac{k!}{\lambda^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

- $\mathbb{P}_3$: Es gilt $\int_{\mathbb{R}} |x|^k \, d\mathbb{P}_3(x) = \int_{\mathbb{R}} |x|^k \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\, dx$ $\qquad \mathbb{P}_3 = \mathcal{U}([a,b])$

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mathbb{P}_3(x) \overset{x^k \leq |x|^k}{\leq} \int_{\mathbb{R}} |x|^k \, d\mathbb{P}_3$$

$$= \int_a^b |x|^k \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$\overset{(*)}{\leq} \int_a^b \frac{1}{b-a} \max\{|a|^k, |b|^k\}\, dx$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \frac{\max\{|a|^k, |b|^k\}}{b-a} \underbrace{\int_a^b 1\, dx}_{=b-a}$$

$$= \max\{|a|^k, |b|^k\} < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow$ x^k ist somit $\mathbb{P}_3$ integrierbar für alle $k \in \mathbb{N}$

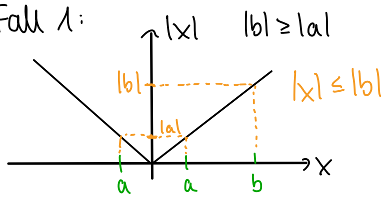
Dann gilt $\int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mathbb{P}_3(x) = \int_{\mathbb{R}} x^k \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\, dx$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b x^k \, dx$$

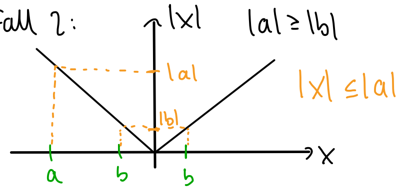
$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{k+1} x^{k+1} \right]_a^b$$

$$= \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)} \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \square$$

(*) Fall 1: $\quad |b| \geq |a|$



Fall 2: $\quad |a| \geq |b|$



$\underline{\text{Vor:}}$ $\mathbb{P}_4 = \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2>0$

b) $\underline{\text{Ges:}}$ $\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x}\, d\mathbb{P}_4(x)$ für $\beta\in\mathbb{R}$

$\underline{\text{Lsg:}}$ Da $e^{\beta x}>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ gilt, ist das Integral wohldefiniert

Nach der Vorlesung gilt

$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{(e^{\beta x})^-}_{=0}\, d\mathbb{P}_4(x) = 0 < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x}\, d\mathbb{P}_4(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\beta x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{1}{2\sigma^2}(2\sigma^2\beta x-(x-\mu)^2)}\, dx$$

Mit quadratischer Ergänzung gilt

$$2\sigma^2\beta x-(x-\mu)^2 = 2\sigma^2\beta x - x^2 + 2\mu x - \mu^2$$

$$= -(x^2 - 2(\sigma^2\beta+\mu)x+\mu^2)$$

$$= -(x^2-2(\sigma^2\beta+\mu)x+(\sigma^2\beta+\mu)^2 - (\sigma^2\beta+\mu)^2+\mu^2)$$

$$= -((x-(\sigma^2\beta+\mu))^2 - (\sigma^2\beta+\mu)^2+\mu^2)$$

$$= -(x-(\sigma^2\beta+\mu))^2+(\sigma^2\beta+\mu)^2-\mu^2$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x}\, d\mathbb{P}_4(x) = e^{((\sigma^2\beta+\mu)^2-\mu^2)\frac{1}{2\sigma^2}} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{1}{2\sigma^2}(-(x-(\sigma^2\beta+\mu))^2)}\, dx}_{=1}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \underbrace{\exp\left(\tfrac{1}{2\sigma^2}\left(-(x-(\sigma^2\beta+\mu))^2+(\sigma^2\beta+\mu)^2-\mu^2\right)\right)}\, dx$$

$$= \exp\left(\tfrac{1}{2\sigma^2}\left(-(x-(\sigma^2\beta+\mu))^2\right)\right)\cdot \exp\left(\tfrac{1}{2\sigma^2}\left((\sigma^2\beta+\mu)^2-\mu^2\right)\right)$$

Da f die Dichte von $\mathcal{N}(\sigma^2\beta+\mu, \sigma^2)$ ist, gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x}\, d\mathbb{P}_4(x) = e^{\frac{1}{2\sigma^2}((\sigma^2\beta+\mu)^2-\mu^2)}$$

$$= e^{\frac{1}{2\sigma^2}(\sigma^4\beta^2+2\sigma^2\beta\mu+\mu^2-\mu^2)}$$

$$= e^{\frac{\sigma^2\beta^2}{2}+\beta\mu}$$

$\square$

<u>Vor:</u> $\mathbb{P}_5 = \text{Cauchy}(s,t)$, $s>0$, $t\in\mathbb{R}$

c) <u>Beh:</u> $\int_{\mathbb{R}} x\, d\mathbb{P}_5(x)$ ist nicht wohldefiniert.

<u>Bew:</u> Betrachte jeweils Integral über Negativ und Positivteil.

$$\int_{\mathbb{R}} x^+\, d\mathbb{P}_5(x) = \int_0^\infty x\, d\mathbb{P}_5(x) = \int_0^\infty x \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2+(x-t)^2}\, dx$$

[Subs. $\overset{\phi(x)}{y} = \frac{(x-t)}{s} \Rightarrow dx = s\,dy$] $= \int_{-\frac{t}{s}}^\infty (sy+t)\frac{1}{\pi}\frac{s}{s^2+s^2y^2} s\,dy$

$x = sy+t \Rightarrow \frac{dx}{dy} = s$

$\phi(0) = -\frac{t}{s}$, $\phi(„\infty") = „\infty"$

$$= \int_{-\frac{t}{s}}^\infty (sy+t)\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\, dy$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \int_{-\frac{t}{s}}^0 (sy+t)\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\, dy + s\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\frac{y}{1+y^2}\, dy + t\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\, dy$$

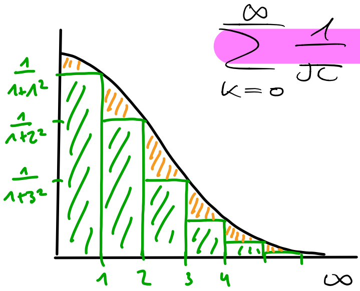
Da die Funktion $y \mapsto (sy+t)\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}$ stetig ist, ist sie auf dem Intervall $[-\frac{t}{s}, 0]$, bzw. $[0, -\frac{t}{s}]$ (falls $t\geq 0$ oder $t<0$) beschränkt, weshalb

$$\int_{-\frac{t}{s}}^{0} (sy+t)\,\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+y^2}\,dy \le \sup_{y\in[-\frac{t}{s},0]} \Big(\underbrace{(sy+t)}_{\le t}\frac{1}{\pi}\underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{\le 1}\Big)\underbrace{\int_{-\frac{t}{s}}^{0} 1\,dy}_{\frac{t}{s}} < \infty \text{ gilt.}$$

Da $\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}}_{\text{Dichte von Cauchy}(1,0)}\,dx = 1$ gilt, gilt

$$t\int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}}_{\ge 0}\,dx \le t\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx = t$$

Mit den Reihenkriterium aus Ana 2 gilt



$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\pi}\,\frac{k}{1+k^2} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{k}{1+k^2} > \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\frac{k}{k^2+k^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}}_{\text{Harmonische Reihe}} = \infty$$

$$\Rightarrow s\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{1+y^2}\,dy = \infty$$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} x^+ \, dP_s(x) = \infty$. Betrachte nun die Substitution $y=-x$ $\phi(x)=-x$ $\Rightarrow dy=-dx$

$$\int_{\mathbb{R}} x^- \, dP_s(x) = \int_{-\infty}^{0} (-x)\,\frac{1}{\pi}\,\frac{s}{s^2+(x-t)^2}\,dx$$

$x^- = -\min\{0,x\} \overset{x\le 0}{=} -x$

$$= \int_\infty^0 y\,\frac{1}{\pi}\,\frac{s}{s^2+(-y-t)^2}\cdot(-1)\,dy$$

$$= \int_0^\infty y\,\frac{1}{\pi}\,\frac{s}{s^2+(y+t)^2}\,dy = \int_{\mathbb{R}} x^+ \, dP_s'(x)$$

mit $P_s' = \text{Cauchy}(s,-t)$.

$\int_{\mathbb{R}} x^+ \, dP_s(x)$ war nicht von t abhängig, damit folgt

$$\int_{\mathbb{R}} x^+ \, dP_s'(x) = \int_{\mathbb{R}} x^+ \, dP_s(x) = \int_{\mathbb{R}} x^- \, dP_s(x) = \infty$$

Da $\int_{\mathbb{R}} x^+ \, d\mathbb{P}_5(x) = \infty$ und $\int_{\mathbb{R}} x^- \, d\mathbb{P}_5(x) = \infty$ ist

$\int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbb{P}_5(x)$ nicht wohldefiniert ($\infty - \infty$ ⚡)

d) <u>Ges:</u> $\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} \, d\mathbb{P}_2(x)$ für $\beta \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{P}_2 = \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$

<u>Lsg:</u> Da $e^{\beta x} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ ist das Integral wohldefiniert (Negativteil gleich Null).

Unterscheide 2 Fälle:

1) $\beta \neq \lambda$: $\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} \, d\mathbb{P}_2(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \, dx$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda - \beta)x} \, dx$$

$$= \left[-\frac{\lambda}{\lambda - \beta} e^{-(\lambda - \beta)x} \right]_0^\infty$$

$$= \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - \beta} & , \lambda > \beta \quad \Rightarrow \lambda - \beta > 0 \Rightarrow -(\lambda - \beta) < 0 \\ \infty & , \lambda < \beta \quad \Rightarrow \lambda - \beta < 0 \Rightarrow -(\lambda - \beta) > 0 \end{cases}$$

2) $\beta = \lambda$: $\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} \, d\mathbb{P}_2(x) = \int_0^\infty \lambda e^{-\underbrace{(\lambda - \beta)}_{=0} x} \, dx = \int_0^\infty \lambda \, dx = \infty$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} \, d\mathbb{P}_2(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - \beta} & , \beta < \lambda \\ \infty & , \beta \geq \lambda \end{cases}$$

$\square$

a) <u>Vor:</u> $f \in \mathcal{E}^+$

<u>Beh:</u> $\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{a \in f(\Omega)} \int_\Omega a \mathbb{1}_{\{f=a\}} d\mu$

<u>Bew:</u> $f \in \mathcal{E}^+$, also hat f eine Darstellung

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$$

$\alpha_k \mathbb{1}_{A_k} \geq 0$, messbar, Lin

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu(A_k)$$

$\Big[$ Per Defition waren die $A_k := \{f = \alpha_k\}$ $\Big]$ $= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu(\{f = \alpha_k\})$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_\Omega \mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}} d\mu$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega \alpha_k \mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}} d\mu$$

Die α_k sind alle aus $f(\Omega)$

$$= \sum_{a \in f(\Omega)} \int_\Omega a \mathbb{1}_{\{f=a\}} d\mu$$

b) <u>Beh:</u> f, g messbar, $|f| \leq g$ μ-f.ü. und g μ-int

$\Longrightarrow$ f μ-integrierbar.

<u>Bew:</u> Es reicht zu zeigen, dass $\int_\Omega |f| \, d\mu < \infty$, da

$|f|$ int $\Rightarrow f$ int

$\int_\Omega |f| \, d\mu < \infty \Longrightarrow \int_\Omega f^+ d\mu < \infty$ und $\int_\Omega f^- d\mu < \infty$. $\to f$ μ-integrierbar

Mit der Monotonie des Integrals fast überall folgt

$$\int_\Omega |f| \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu < \infty \text{ nach Vorraussetzung}$$

c) <u>Beh:</u> f, g stetig und $f = g$ λ-f.ü.

$\Rightarrow f = g$ auf ganz $\mathbb{R}$

<u>Bew:</u> Angenommen es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$f(x_0) \neq g(x_0)$. Da f und g stetig sind existieren

für jedes $\delta > 0$, $\varepsilon_f, \varepsilon_g > 0$ mit

f stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$: $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$

$$|f(x_0) - f(x)| < \delta \quad \forall x \in \underbrace{[x_0 - \varepsilon_f, x_0 + \varepsilon_f]}_{}$$

$|x - x_0| < \varepsilon_f$

und $\quad |g(x_0) - g(x)| < \delta. \ \forall x \in [x_0 - \varepsilon_g, x_0 + \varepsilon_g]$

D.h. es existiert $\varepsilon > 0$, sodass

$|x - x_0| < \varepsilon$

$$f(x) \neq g(x) \ \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Also $f \neq g$ auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.

$\lambda([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]) = x_0 + \varepsilon - x_0 + \varepsilon = 2\varepsilon > 0$

$\Rightarrow f = g$ gilt <u>nicht</u> λ-f.ü. $\quad ⚡ \qquad \square$