Lebesgue-Maß durch Carathéodory

⇝ $\mathcal{B}([0,1]) = \sigma(\underbrace{\{(a,b] \mid 0 \le a \le b \le 1\}}_{=\mathcal{E}_1})$

⇝ Fortsetzung $\lambda_{[0,1]}$ auf $\mathcal{B}([0,1])$ der Mengenfkt.: $\lambda: \mathcal{E}_1 \to \mathbb{R}$, $(a,b] \mapsto b-a$

Lebesgue-Maß durch Einschränkung

⇝ $\mathcal{B}([0,1]) = \{B \cap [0,1] \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

⇝ $\lambda_{[0,1]}(B) := \lambda(B)$, $B \in \mathcal{B}([0,1])$

λ Lebesgue maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

---

a) <u>Z.z.:</u> $\sigma(\{(a,b] \mid 0 \le a \le b \le 1\}) = \{B \cap [0,1] \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

<u>Bew:</u> Kleine Topologienotation (in $\mathbb{R}$). Sei $A \subseteq \mathbb{R}$.

Man sagt C ist offen in A, falls eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ existiert, sodass $C = D \cap A$.

<u>Bsp.</u> $\underset{C}{(0,1]}$ ist offen in $\underset{A}{[0,1]}$, da $\underset{C}{(0,1]} = \underset{D}{(0,2)} \cap \underset{A}{[0,1]}$

Wir zeigen $\sigma(\underbrace{\{(a,b] \mid 0 \le a \le b \le 1\}}_{=\mathcal{E}_1})$

$= \sigma(\underbrace{\{O \subseteq [0,1] \mid O \text{ offen in } [0,1]\}}_{=:\mathcal{E}_2})$,

da dann $= \{B \cap [0,1] \mid B \in \sigma(\{O \mid O \text{ offen}\})\}$

$= \{B \cap [0,1] \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ folgt.

Wieder über $\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$, $\mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$

„$\subseteq$": Sei $(a,b] \in \{(a,b] \mid 0 \le a \le b \le 1\}$. Dann ist

$(a,b] = \underbrace{\bigcap_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{abz. Schnitt}} \underbrace{((a, b+\tfrac{1}{n}) \cap [0,1])}_{\text{offen in } [0,1],\ \in \mathcal{E}_2} \in \sigma(\{O \subseteq [0,1] \mid O \text{ offen in } [0,1]\})$ mit $\cap$-Stabilität von σ-Algebren

„$\supseteq$": Sei O offen in $[0,1]$. Dann existieren für jedes $x \in O$ $a_x, b_x \in \mathbb{Q}$, mit $x \in (a_x, b_x]$ und $(a_x, b_x] \subseteq O$.

Dann ist $O = \bigcup_{\mathbb{Q} \text{ abz.}} \underbrace{\{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{Q}, 0 \le a \le b \le 1, (a,b] \subseteq O\}}_{\subseteq \mathcal{E}_1}$ mit $\cup$-Stabilität (abzählbar) von σ-Algebren

$\Rightarrow O \in \sigma(\{(a,b] \mid 0 \le a \le b \le 1\})$ $\square$

b) Wir stellen fest, dass $\overline{\lambda}_{[0,1]}$ und $\lambda_{[0,1]}$ auf $\mathcal{S} := \{ \underbrace{(a,b]}_{= E_n} \mid 0 \leq a < b \leq 1 \}$ gleich sind. $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}([0,1])$

$$\overline{\lambda}_{[0,1]}((a,b]) = b-a = \lambda_{[0,1]}((a,b]),$$ zudem gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(\tfrac{1}{n}, 1]}_{= E_n} = \underset{\Omega}{[0,1]} \text{ und}$$

$$\overline{\lambda}_{[0,1]}((\tfrac{1}{n}, 1]) = \lambda_{[0,1]}((\tfrac{1}{n}, 1]) = 1 - \tfrac{1}{n} < \infty$$

$\Rightarrow$ Da $\mathcal{S}$ $\cap$-stabil ist und wir eine σ-endliche Folge in $\mathcal{S}$ gefunden haben die gegen $[0,1]$ wächst für welche die Maße gleich sind. Daraus folgt, dass die Fortsetzung der Einschränkung auf $[0,1]$ eindeutig sein muss.

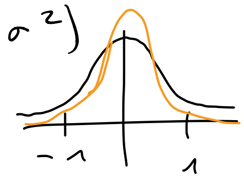
1) $\lambda_{[0,1]}$ ist das Lebesgue-maß (es werden lediglich nur Mengen aus einer unter-σ-Algebra von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ eingesetzt)

2) $\overline{\lambda}_{[0,1]}$ ist ein Maß auf $\mathcal{B}([0,1])$ analog Übungsblatt Aufgabe n Fortsetzung des Lebesguemaßes unter der Verwendung von $\mathcal{S}$ wie oben definiert, sd. eine Fortsetzung auf $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}([0,1])$ stattfindet.

$\perp$

geg.: $\int_r^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \le e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ $\quad r \ge 0$

Geg: W-Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$



Ges: σ, sodass $\mathbb{P}([-1,1]) \ge 0{,}99$

Lsg: Da die Dichte der Normalverteilung stetig ist, ist auch die Verteilungsfunktion der Normalverteilung stetig.

$\mathbb{P}((-\infty, 1])$ $\quad \mathbb{P}((-\infty, -1])$

Gü

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\underbrace{[-1,1]}_{}) \overset{\{-1\}\cup(-1,1]}{=} \ldots \quad \mathbb{P}([-1,1]) = \mathbb{P}((-1,1]) = F(1) - F(-1)$$

wobei F die Verteilungsfunktion der Normalverteilung sei.

Mit der Substitution $y = -x$ gilt zudem für $r \ge 0$:

$$(1) \quad e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \ge \int_r^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-r}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(-y)^2}{2\sigma^2}} (-1) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{-r} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

$$= F(-r)$$

$$\Rightarrow F(-1) \le e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$$

Zudem gilt

$$(2) \quad F(1) = \int_{-\infty}^{1} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}_{=f} dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx}_{=1}$$

$$-\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, dx$$

f Dichte-fkt.

$$= 1 - \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, dx$$

$$\geq 1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$$

(1) + (2)

$$\Rightarrow \mathbb{P}([-1,1]) = F(1) - F(-1)$$

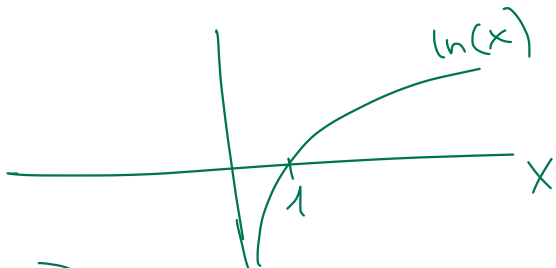
$$\geq 1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$$

$$= 1 - 2e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$$

Also gilt:

$$1 - 2e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} \geq 0{,}99 \iff 0{,}01 \geq 2e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$$

ln monoton wachsende Fkt.



$$\iff \ln(0{,}01) \geq \ln(2e^{-\frac{1}{2\sigma^2}})$$

$$\iff \ln(0{,}01) \geq \ln(2) + \ln(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}})$$

$$\iff \ln(0{,}01) - \ln(2) \geq -\frac{1}{2\sigma^2}$$

$$\iff \underbrace{\ln(0{,}005)}_{<0} \geq -\frac{1}{2\sigma^2}$$

(*)

$$\iff \frac{1}{\ln(0{,}005)} \leq -2\sigma^2$$

$\iff$

$$-2\sigma^2(\ln(0.005)) \leq 1$$

$$\iff -2\sigma^2 \geq \frac{1}{\ln(0.005)}$$

$$\iff \frac{1}{\underbrace{-2\ln(0{,}005)}_{\geq 0}} \geq \sigma^2$$

$$\iff \sqrt{\frac{1}{2\ln(200)}} \geq |\sigma|$$

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathcal{A}) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left=30, "g\circ f"] & (\Omega', \mathcal{A}') \arrow[r, "g"] \arrow[l, bend left, "f^{-1}(g^{-1}(A))"] & (\Omega'', \mathcal{A}'') \arrow[ll, bend right=20, "(g\circ f)^{-1}"'] \arrow[l, bend left, "g^{-1}(A)"] \\
 & & A \in
\end{tikzcd}$$

<u>Geg</u>: Messbare Räume $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$, $(\Omega'', \mathcal{A}'')$

$f: \Omega \to \Omega'$, $g: \Omega' \to \Omega''$ messbare Funktionen

a) <u>Beh:</u> $g \circ f$ ist $(\mathcal{A}, \mathcal{A}'')$-messbar

<u>Bew:</u> Sei $A \in \mathcal{A}''$. Dann gilt $g^{-1}(A) \in \mathcal{A}'$, da g messbar.

Da f messbar ist gilt $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{A}'$.

Dann gilt $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{A}$.

$\Rightarrow \overbrace{f^{-1}(g^{-1}(A))}^{=(g\circ f)^{-1}} \in \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{A}''$

$\Rightarrow g \circ f$ ist $(\mathcal{A}, \mathcal{A}'')$-messbar $\square$

b) <u>Beh:</u> $\sigma(f)$ ist die kleinste σ-Algebra bzgl. der f messbar ist.

<u>Bew:</u> Dass $\sigma(f) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}'\}$ eine σ-Algebra ist habt ihr auf einem ÜB gezeigt.

Per Definition ist f $(\sigma(f), \mathcal{A}')$-messbar.

Sei nun $\mathcal{A}_0$ eine σ-Algebra, so dass f $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}')$-messbar ist. Dann gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_0 \ \forall A \in \mathcal{A}'$.

Also ist $\sigma(f) \subseteq \mathcal{A}_0$

$\Rightarrow \sigma(f)$ ist die kleinste σ-Algebra bzgl. der f messbar ist.

$\square$

c) <u>Vor:</u> f $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$ σ-Algebren

<u>Beh:</u> f $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$-messbar

<u>Bew:</u> Sei $A \in \mathcal{B}'$ beliebig. Dann gilt $A \in \mathcal{A}'$ wegen $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$. Zudem gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ weil f $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar ist. Wegen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ gilt auch $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$.

$\Rightarrow$ f $(\mathcal{B}\ \mathcal{B}')$messbar. $\square$

Geg: $(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $g: \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. $\{f \leq t\} \in \mathcal{A} \ \forall t \in \mathbb{R}$

Beh: 1) αf, 2) $f+g$, 3) $f-g$, 4) $f \cdot g$ sind messbare Funktionen und die Menge der $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbaren Funktionen ist Vektorraum.

Bew: Da es ausreicht Messbarkeit auf einem Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ zu zeigen. Wir zeigen zunächst, dass

1) $$\{\alpha f \leq t\} := (\alpha f)^{-1}((-\infty, t]) \in \mathcal{A} \ \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt. Dies reicht aus, da $\{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist. Sei $\alpha \neq 0$ und $t \in \mathbb{R}$.

$\alpha < 0$?

Dann gilt $\{\alpha f \leq t\} = \{f \leq \frac{t}{\alpha}\} \in \mathcal{A}$, da $\frac{t}{\alpha} \in \mathbb{R}$ und f messbar ist. Für $\alpha = 0$ gilt zudem:

$$\{\alpha f \leq t\} = \{0 \leq t\} = \begin{cases} \emptyset, & t < 0 \\ \Omega, & t \geq 0 \end{cases} \in \mathcal{A}.$$ (σ-Algebra Eig.)

$\Rightarrow \{\alpha f \leq t\} \in \mathcal{A} \ \forall \alpha, t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha f$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar

2) Da $\{(-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\}$ ebenfalls ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist, reicht es zudem aus zu zeigen, dass $(f+g)^{-1}((-\infty, t))$ $= \{f+g < t\} \in \mathcal{A}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\omega \in \{f+g < t\} \Leftrightarrow f(\omega) + g(\omega) < t \Leftrightarrow f(\omega) < t - g(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q}: f(\omega) < q < t - g(\omega),$$

wobei die letzte Äquivalenz gilt, da die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen. Also gilt

$$\omega \in \{f+g<t\} \iff \exists q \in \mathbb{Q} : f(\omega)<q \wedge q<t-g(\omega)$$

$$\iff \omega \in \underbrace{\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \underbrace{\left(\underbrace{\{f<q\}}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{\{q<t-g\}}_{\in\mathcal{A}}\right)}_{\in\mathcal{A}}}_{\in\mathcal{A}\text{, da } \mathbb{Q} \text{ abzählbar}}$$

f, g messbar
∩-Stabilität von σ-Algebren (abzählbare)
∪-Stabilität von -"-

$\Longrightarrow f+g$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar

3) Mit $\alpha=-1$ ist auch $\alpha g=-g$ messbar (mit 1) und daraus folgt, dass $f-g=f+(-g)$ messbar ist. (mit 2)

4) Für $f\cdot g$ zeigen wir zunächst, dass f^2 messbar ist. (4*)
Sei $t\in\mathbb{R}$, dann gilt

$$\{f^2<t\} = \begin{cases} \emptyset, & t\le 0 \\ \{|f|<\sqrt{t}\}, & t>0 \end{cases} = \begin{cases} \emptyset, & t\le 0 \\ (\{f<\sqrt{t}\}\cap\{f\ge 0\})\cup(\{-f<\sqrt{t}\}\cap\{f<0\}), & t>0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \{f^2<t\}\in\mathcal{A}$, da $\emptyset\in\mathcal{A}$ und f bzw. $-f$ messbar (σ-Algebra Eig.)

$\Longrightarrow f^2$ messbar

$$\Longrightarrow f\cdot g = \underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2}\underbrace{(\underbrace{f+g}_{2)})^2}_{4^*}}_{1} - \underbrace{\tfrac{1}{2}\underbrace{f^2}_{4^*}}_{1} - \underbrace{\tfrac{1}{2}\underbrace{g^2}_{4^*}}_{1}}_{2}$$

ist als Summe messbarer Funktionen messbar.

Für Vektorraum müssen wir noch Abgeschlossenheit unter punktweiser Addition und skalarer Multiplikation
Seien $f, g, h\in\mathcal{F}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ und $x\in\Omega$
Dann gilt $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x)$

$$= f(x)+g(x)+h(x)$$

$= f(x) + (g+h)(x)$

$\Rightarrow$ Assoziativgesetz

Sei 0 die Nullfunktion. Dann gilt

$$(f+0)(x) = f(x) + \underbrace{0(x)}_{\text{als Konstante messbar}} = f(x)$$

$\Rightarrow$ Existenz eines neutralen Elements

f messbar $\overset{\text{mit } 17}{\Rightarrow} -f$ messbar und $(f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = 0$

$\Rightarrow$ Existenz eines Inversen Elements

$\Rightarrow$ Die Kommutativität folgt aus der Kommutativität von $(\mathbb{R},+)$.

$$(\alpha(f+g))(x) = \alpha(f+g)(x)$$
$$= \alpha(f(x)+g(x))$$
$$= \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)$$

$\Rightarrow$ Distributivgesetz

$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \Rightarrow$ Neutralität der 1

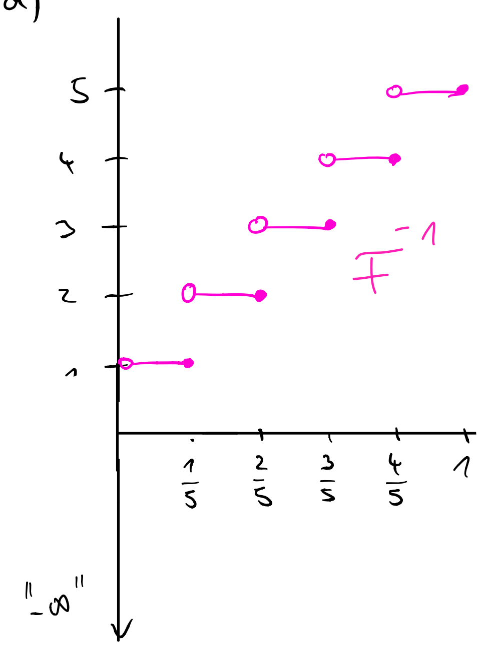
$\Rightarrow$ Die Menge der $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbaren Funktionen $\mathcal{F}$ ist ein Vektorraum.

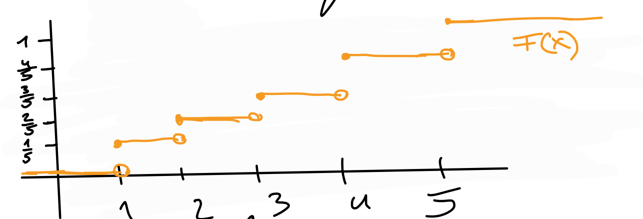
Sei $\mathbb{P}$ ein Maß der Verteilung $\mathcal{U}([0,1])$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, F Vt.fkt. einer diskreten ZV die nur endlich viele Werte annimmt &

$$F^{-1}: [0,1] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \longmapsto \inf\{s \in \mathbb{R} \mid F(s) \geq x\} \quad (\inf \emptyset = -\infty)$$

Sei $F = \sum_{k=1}^{n} p_k \mathbb{1}_{[a_k, \infty)}$ die Verteilungsfunktion mit Sprungstellen a_k und Sprunghöhen p_k.

a) Für $F: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ $x \longmapsto \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{5} \mathbb{1}_{[k,\infty)}(x)$: ges.: F^{-1}





- Sei $x = 0$, dann ist $F^{-1}(x) = -\infty$
- Sei $0 < x \leq \frac{1}{5}$, dann ist
$F^{-1}(x) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid F(s) \geq x\} = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{5} \mathbb{1}_{[k,\infty)}(s) \geq x\}$
$= 1$

⋮

- Sei $\frac{4}{5} < x \leq 1$, dann ist $F^{-1}(x) = 5$

b.) Beh.: F^{-1} ist $(\mathcal{B}([0,1]), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-messbar

Bew.: Für eine allg. Verteilungsfunktion einer endlichen, diskreten Zufallsvariable (wie oben) kann man F^{-1} explizit hinschreiben.

$$F^{-1} = -\infty \cdot \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{(\sum_{i=1}^{k-1} p_i, \sum_{i=1}^{k} p_i]},$$ mit $\sum_{i=1}^{k-1} p_i = 0$, falls $k-1 < 1$

Diese ist als Summe von Indikatorfunktionen von Mengen aus $\mathcal{B}([0,1])$ wieder $(\mathcal{B}[0,1], \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-messbar.

Achtung: Die explizite Angabe von F^{-1} ist nicht die Inverse von F. Diese existiert nicht, da F keine Umkehrabbildung besitzt.

c) Bestimme die Vert.-fkt. des Bildmaßes: $\mathbb{P} \circ (F^{-1})^{-1}$

Lsg.: Sei $t \in \mathbb{R}$.

$$(\mathbb{P} \circ (F^{-1})^{-1})((-\infty, t]) = \mathbb{P}(F^{-1}(x) \leq t)$$

$$= \mathbb{P}(x \leq F(t))$$

Da für $s \in [0,1]$ $\mathbb{P}(x \leq s) = s$ gilt, weil $\mathbb{P}$ das Maß der uniformen Verteilung auf $[0,1]$ ist und $F(t) \in [0,1]$ per Definition, folgt

$$\mathbb{P}(x \leq F(t)) = F(t)$$

$\Rightarrow$ Verteilungsfunktion von $\mathbb{P} \circ (F^{-1})^{-1}$ ist F. $\square$

$\{(-\infty, t], \ t \in \mathbb{R}\}$