Sei $\mathcal{E} = \{E \subseteq \mathbb{R} \mid E \text{ endlich}\}$

und $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty],\ E \mapsto 0$

a)

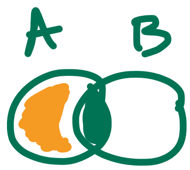
1) <u>Bel:</u> $\mathcal{E}$ ist Semiring

<u>Bew:</u> i) $\#\emptyset = 0 \Rightarrow \#\emptyset < \infty \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{E}$

ii) Seien $A, B \in \mathcal{E}$. Es gilt $A \cap B \subseteq A$

$\Rightarrow \# A \cap B \leq \# A < \infty$

$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}$



iii) Seien $A, B \in \mathcal{E}$. Es gilt $A \setminus B \subseteq A$

$\Rightarrow \# A \setminus B \leq \# A < \infty$

$\Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{E}$

redundanter Schritt für Def. $\left(\Rightarrow A \setminus B = \underbrace{(A \setminus B)}_{\in \mathcal{E}} \right)$ $\square$

$\exists C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{E}$ paarweise disjunkt

$\underbrace{A \setminus B = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} C_i}$

$C := A \setminus B \in \mathcal{E}$

$A \setminus B = C$

2) <u>Bel:</u> $\sigma(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ abz. oder } A^c \text{ abz.}\} =: \mathcal{A}$

<u>Bew:</u> $\mathcal{A}$ ist nach Vorlesung eine σ-Algebra.

Es reicht also wieder (Ringschluss + Monotonie + Idempotenz) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ für $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ zu zeigen.

1. „$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$": Gilt, da jede endliche Menge abz. ist

2. „$\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$": Jede abz. Menge kann als abz. Vereinigung endlicher Mengen dargestellt werden (trivial)

$A \in \mathcal{A}$

$\exists A_1, \ldots$ endlich $\in \mathcal{E}$

$\underbrace{A = \dot{\bigcup}_{i=1} \underbrace{A_i}_{\in \mathcal{E}}}_{\in \sigma(\mathcal{E})}$ Abgeschlossenheit über Vereinigungen

Zusammen: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. $\square$

$\sigma(\mathcal{E}) \underset{1.\ \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}}{\overset{\text{Monotonie } \sigma\text{-Algebren}}{\subseteq}} \sigma(\mathcal{A}) \overset{\text{idempotent}}{=} \mathcal{A} \overset{2.}{\subseteq} \sigma(\mathcal{E})$

b) <u>Bel:</u> Es existieren unendlich viele Fortsetzungen von von μ zu Maßen auf $\sigma(\mathcal{E})$

<u>Bew:</u> Definiere für $\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

$$\nu_\alpha : \sigma(\mathcal{E}) \to [0,\infty],\ E \mapsto \nu_\alpha(E) := \begin{cases} 0, & E \text{ abz.} \\ \alpha, & E^c \text{ abz.} \end{cases}$$

Dann gilt $\mu(E) = 0 = \nu_\alpha(E)\ \forall E \in \mathcal{E}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Es bleibt zu zeigen, dass $(\nu_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}}$ eine Familie von Maßen ist.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ bel.

- $\nu_\alpha \geq 0$ per Definition
- $\nu_\alpha(\emptyset) = 0$ da $\emptyset$ höchstens abz.
- Seien $E_1, E_2, \ldots \in \sigma(\mathcal{E})$ disjunkte Mengen

i) <u>Fall 1:</u> $E_1, E_2, \ldots$ sind alles abzählbare Mengen.

Dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ wieder abz. Also gilt

$$\nu_\alpha\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\Big) = 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_\alpha(E_n)$$

ii) <u>Fall 2:</u> Min. ein E_n ist überabzählbar. z viele über-abzählbar Mengen $z \in \mathbb{N}$

$$\nu_\alpha\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\Big) = \alpha \neq z\alpha = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_\alpha(E_n)$$

<u>Überlegung:</u> Seien E_1 und E_2 aus $\sigma(\mathcal{E})$, so, dass E_1^c und E_2^c abzählbar sind. Dann gilt

$$E_1 \cap E_2 \overset{\text{De Morgan}}{=} (E_1^c \cup E_2^c)^c = \mathbb{R} \setminus (E_1^c \cup E_2^c).$$

Weil E_1^c und E_2^c abzählbar sind, gilt

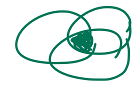
$$E_1 \cap E_2 = \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{überabzählbar}} \setminus \underbrace{(E_1^c \cup E_2^c)}_{\text{abzählbar}} \neq \emptyset.$$

$\Longrightarrow$ Eine <u>disjunkte</u> Folge von Mengen in $\sigma(\mathcal{E})$ kann also höchstens eine Menge enthalten deren Komplement abz. ist.

$z = 1$!

Sei E_i die Menge in Fall 2, sodass E_i^c abz.. Dann gilt

$$\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} E_n\Big)^c \overset{\text{De Morgan}}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n^c \subseteq E_i^c. \text{ Also ist } \Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} E_n\Big)^c \text{ abz.}$$



Also gilt $\nu_\alpha\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} E_n\Big) = \alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_\alpha(E_n)$, da nur der Summand $\nu_\alpha(E_i) = \alpha$ und $\nu(E_j) = 0$ $\forall i \neq j$ gilt.

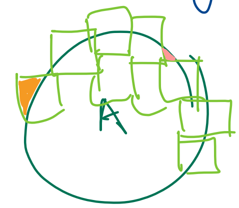
Also gilt $\nu_\alpha(E) = \mu(E)$ $\forall E \in \mathcal{E}$ und ν_α ist eine Fortsetzung auf $\sigma(\mathcal{E})$. Da $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bel. war gibt es unendlich viele Fortsetzungen von μ auf $\sigma(\mathcal{E})$.

Die Fortsetzungen stellen keinen Widerspruch zum Satz im Skript dar, da gefordert wird, dass μ σ-endlich ist auf $\mathcal{E}$. Es existiert keine Folge $\underbrace{(E_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\in\mathcal{E}}$ endlicher Mengen, sodass

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{überabzählbar}}$$

gilt.

Sei $\mathcal{S}$ ein Semiring und μ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{S})$, sd. die Einschränkung von μ auf $\mathcal{S}$ σ-endlich ist.



Bel: Es existieren zu jeder Menge $A \in \sigma(\mathcal{S})$ mit $\mu(A) < \infty$ und bel. $\varepsilon > 0$ paarweise disjunkte Mengen $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{S}$ mit

$$\mu\Big(A \,\triangle\, \bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) < \varepsilon$$

Bew: Sei $A \in \sigma(\mathcal{S})$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\varepsilon > 0$ bel.

Man definiere wieder das äußere Maß

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \,\Big|\, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S},\ A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Big\}$$

(Beweis für äußeres Maß siehe Beweis Carathéodory)

$\Rightarrow$ μ^* ist ein Maß auf $\mathcal{A}_{\mu^*}$ (siehe Beweis Caratheodory)

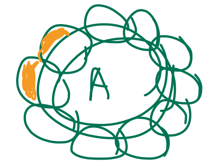
$\Rightarrow$ es gilt $\underbrace{\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \overset{\sigma(\mathcal{A}_{\mu^*})}{\overset{\|}{\mathcal{A}_{\mu^*}}}}_{\text{+ Monotonie } \sigma\text{-Algebra + Idempotenz}}$ $[\mathcal{A}_{\mu^*}$ ist σ-Alg $+$ $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}]$ $\rightsquigarrow$ Caratheodory

$\Rightarrow$ μ^* ist ein Maß auf $\sigma(\mathcal{S})$

$\Rightarrow$ $\mu = \mu^*$ auf $\sigma(\mathcal{S})$ da die Fortsetzung aufgrund der σ-Endlichkeit von μ eindeutig ist

1) Nach Definition von μ^* existieren daher $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$



und

$$\overset{\mu^*(A)}{\overset{\|}{\mu(A)}} \le \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\mu(A_n)}_{\text{Nullfolgen}} < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} < \infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \setminus A\Big)}_{= \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) - \mu(A)} \overset{\text{Sub-additivität}}{\le} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) - \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

2) Für $\mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right)$ gilt mit der Stetigkeit von Maßen (unter Berücksichtigung der Endlichkeit) dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\mu\left(\bigcup_{k=n_0+1}^{\infty} A_k\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Zusammen gilt mit Subadditivität

Monotonie von Maßen

$$\mu\left(A \,\triangle \bigcup_{k=1}^{n_0} A_k\right) \le \overbrace{\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus A\right)}^{<\frac{\varepsilon}{2}} + \overbrace{\mu\left(\bigcup_{k=n_0+1}^{\infty} A_k\right)}^{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$= \mu\left(\left(A\setminus\bigcup_{k=1}^{n_0} A_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n_0} A_k\setminus A\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n_0} A_k\setminus A\right) + \mu\left(A\setminus\bigcup_{k=1}^{n_0} A_k\right)$$

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$A\setminus\bigcup_{k=1}^{n_0} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{n_0} A_k = \bigcup_{k=n_0+1}^{\infty} A_k$$

Zuletzt muss man noch zeigen, dass sich $\bigcup_{k=1}^{n_0} A_k$ als endliche Vereinigung paarweiser disjunkter Mengen aus $\mathcal{S}$ darstellen lässt. Dafür definiert man

$$B_1 := A_1, \quad B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \underbrace{(B_i \cap A_k)}_{\in\, \mathcal{S},\ \text{da } \cap\text{-stabil}} \quad \forall k \in \{2,\dots,n_0\}$$

für jedes $k \in \{2,\dots,n_0\}$ findet man mit Lemma 1.3.2 eine disjunkte Folge von Mengen $C_{1,k},\dots,C_{m_k,k} \in \mathcal{S}$, sodass

$$A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k} (B_i \cap A_k) = \dot{\bigcup_{i=1}^{m_k}} C_{i,k}$$

Also hat man eine endliche Vereinigung einer endlicher Vereinigung, also eine endliche Vereinigung, von Mengen aus $\mathcal{S}$ sodass die Behauptung gilt □

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebige Folge reeller Zahlen, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen reellen Zahlen, sd.

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$ erfüllt und die Fkt F def

als $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \mathbb{1}_{[a_n,\infty)}(t)$

$(-\infty, t]$

a_n

a) Beh: F ist eine Verteilungsfunktion

(i) Offensichtlich gilt $F \geq 0$ und da $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ ist F durch 1 beschränkt. Also $0 \leq F \leq 1$

t_1 t_2

a_n

(ii) Seien $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $t_1 \leq t_2$. Dann gilt $\mathbb{1}_{[a_n,\infty)}(t_1) \leq \mathbb{1}_{[a_n,\infty)}(t_2)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ und damit $F(t_1) \leq F(t_2)$

$F(t_1) < F(t_2)$

$\mathbb{1}_{[a_n,\infty)}(t)$

(iii) Sei $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} t_k = t$. Dann gilt

$\lim_{k\to\infty} t_k$ $\|$

1

rechtsstetig a_n t

$$\lim_{k\to\infty} F(t_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \mathbb{1}_{[a_n,\infty)}(t_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \mathbb{1}_{[a_n,\infty)}(t) = F(t),$$

da die Intervalle der Indikatoren links abgeschlossen sind und daher rechtsstetig sind (Fallunterscheidung)

$\mathbb{1}_{(a_n,\infty)}(t)$

1

linksstetig

(iv) Es gilt einerseits $\lim_{t\to-\infty} \mathbb{1}_{[a_n,\infty)}(t) = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ und $\lim_{t\to\infty} \mathbb{1}_{[a_n,\infty)}(t) = 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Da $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$ folgt $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$

b) Beh: $\mathbb{P}$ mit $\mathbb{P}((-\infty, t]) = \sum p_n \delta_{a_n}((-\infty, t])$ $\forall t\in\mathbb{R}$ ist das F zugehörige Maß $\mathbb{P}_F$.

$[t, \infty)$

Bew: Sei $\mathbb{P}: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$, $B \mapsto \mathbb{P}(B) := \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{a_n}(B)$

1) gegeben. $\mathbb{P}$ ist als Mischung von Maßen ein Maß und es gilt

2) $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \underbrace{\delta_n(\mathbb{R})}_{=1} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, also ist $\mathbb{P}$ ein W-Maß.

$a_n \in (-\infty, t]$
$\iff t \geq a_n$
$\iff t \in [a_n, \infty)$

Sei nun $F^*: \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto \mathbb{P}((-\infty, x])$ die Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$. Dann gilt

$$F^*(t) = \mathbb{P}((-\infty, t]) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \, \delta_{a_n}((-\infty, t]) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot \mathbb{1}_{[a_n, \infty)}(t)$$
$$= F(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

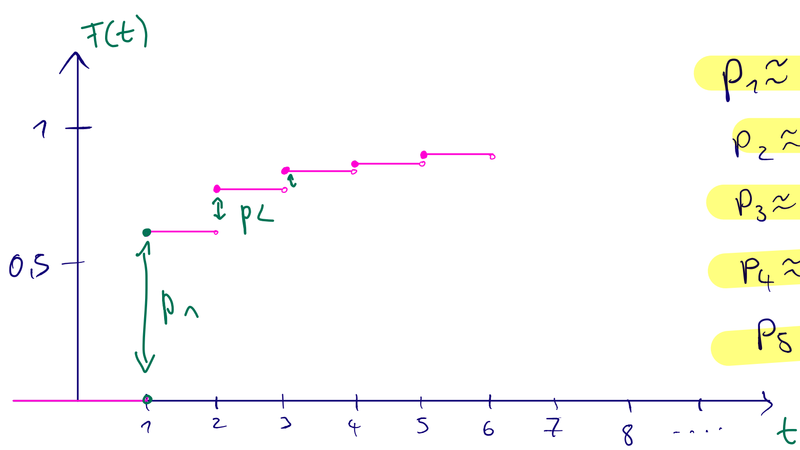
$\Longrightarrow$ $\mathbb{P}$ ist das zu F zugehörige Maß.

c) • $\mathbb{P}((a,b]) \overset{\text{Add. von Maßen}}{=} \mathbb{P}((-\infty, b]) - \mathbb{P}((-\infty, a])$ $\quad (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]$
$= F(b) - F(a)$ $\quad (-\infty, t]$

• $\mathbb{P}([a,b]) = \mathbb{P}((-\infty, b]) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, a - \tfrac{1}{n}]\right)$ $\quad (-\infty, b] \setminus (-\infty, a)$
$\overset{\text{Stetigkeit (i)}}{=} F(b) - \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}((-\infty, a - \tfrac{1}{n}]) = F(b) - \lim_{n \to \infty} F(a - \tfrac{1}{n})$ (*)
$= F(b) - F(a_-)$, $\quad F(a_-) := \lim_{t \uparrow a} F(t)$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{P}((a,b]) \neq \mathbb{P}([a,b])$, falls* $F(a_-) \neq F(a)$,
also falls $a \in (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

d)



$p_1 \approx 0{,}61$

$p_2 \approx 0{,}152$

$p_3 \approx 0{,}0675$

$p_4 \approx 0{,}038$

$p_5 \approx 0{,}024$

Sei $\mathcal{S} := \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R},\ a \le b\}$ und

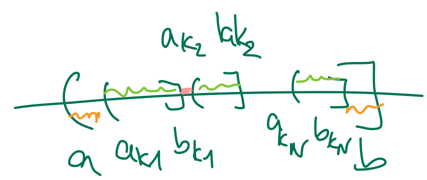
$$\lambda : \mathcal{S} \longrightarrow [0,\infty)$$
$$(a,b] \longmapsto \lambda((a,b]) = b-a$$

<u>Ges:</u> Fortsetzung von λ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

<u>Lsg:</u> Nach VL ist 1) $\mathcal{S}$ ein Semiring und es gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \overset{2)}{=} \sigma(\mathcal{S})$. Mit dem Fortsetzungssatz bleibt zu zeigen, dass $\lambda(\emptyset) \overset{3)}{=} 0$ und λ σ-additiv. 4)

i) Für $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda(\emptyset) = \lambda((a,a]) = a - a = 0$

ii) Sei $((a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von disjunkten Intervallen mit $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n] \in \mathcal{S}$



Eig $\mathcal{S}$

$\Longrightarrow \exists\, a,b \in \mathbb{R} : \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n] = (a,b]$

$\Longrightarrow \dot{\bigcup}_{n=1}^{N} (a_n, b_n] \subseteq (a,b] \quad \forall N \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow a \le a_n$ und $b_n \le b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Wir sortieren die a_n, b_n so um, dass

$$a \le a_{k_1} \le b_{k_1} \le a_{k_2} \dots \le a_{k_{N-1}} \le a_{k_N} \le b_{k_N} \le b$$

„$\le$": Damit gilt $\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda((a_n,b_n]) = \lambda\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} (a_n,b_n]\right)$

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda((a_n,b_n]) = \sum_{n=1}^{N} (b_{k_n} - a_{k_n}) \le (a_{k_1} - a) + \sum_{n=1}^{N-1} \left((b_{k_n} - a_{k_n}) + (a_{k_{n+1}} - b_{k_n}) \right) + (b_{k_N} - a_{k_N}) + (b - b_{k_N})$$

$$= (a_{k_1} - a) + \sum_{n=1}^{N-1} (a_{k_{n+1}} - a_{k_n}) + (b_{k_N} - a_{k_N}) + (b - b_{k_N})$$

$$= a_{k_1} - a + a_{k_N} - a_{k_1} + b_{k_N} - a_{k_N} + b - b_{k_N}$$

$$= b - a = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n]\right) \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

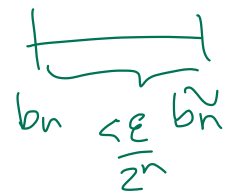
$$\cancel{a_{k_2}} - a_{k_1} + \cancel{a_{k_3}} - \cancel{a_{k_2}} + \cancel{a_{k_3}} - a_{k_4} + \dots + b_N - \cancel{b_{N-1}}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \le b - a = \lambda\Big(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (a_n, b_n]\Big)$$

„$\geq$": Sei $\varepsilon > 0$ und $\tilde{b}_n > b_n$, sodass $\tilde{b}_n - b_n < \varepsilon 2^{-n}$ gilt. $\forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt

$$[a+\varepsilon, b] \subseteq (a,b] = \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (a_n, b_n] \subseteq \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (a_n, \tilde{b}_n)$$



$\Rightarrow$ Die Intervalle $(a_n, \tilde{b}_n)$ bilden eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[a+\varepsilon, b]$

Mit Heine-Borel folgt $\exists k \in \mathbb{N}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$:

$$[a+\varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (a_{n_i}, \tilde{b}_{n_i}) \quad (*)$$

Wir können wieder annehmen, dass man b_n und a_n umsortieren kann. Damit die Indizes nicht zu verwirrend werden, nehmen wir o.B.d.A an, dass sie sortiert sind.

$$\Longrightarrow b - (a+\varepsilon) \overset{\text{Monotonie}}{\le} \sum_{i=1}^{k} (\tilde{b}_{n_i} - a_{n_i}) \le \sum_{i=1}^{k} (b_{n_i} - a_{n_i} + \varepsilon 2^{-n_i}) \le \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) + \varepsilon.$$

da $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ geometrische Reihe

$$\Longrightarrow \lambda((a,b]) - \varepsilon \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((a_n, b_n]) + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lambda((a,b]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((a_n,b_n]), \text{ da } \varepsilon \text{ bel.}$$

$$\Longrightarrow \lambda\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} (a_n,b_n]\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda((a_n,b_n])$$

$\Longrightarrow$ λ ist σ-additiv

Carathéodory $\Longrightarrow$ Es existiert eine Fortsetzung von λ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Bleibt noch zu zeigen, dass λ ein unendliches Maß ist, also $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$ gilt.

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\Big(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(-n,n]}_{\in S}}_{\in\sigma(S)}\Big) \overset{\substack{\text{Stetig.}\\ \text{von Maßen}}}{=} \lim_{n\to\infty} \lambda((-n,n]) = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty$$

$\square$