a) Vorr: $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

Beh: $\mathcal{D}$ ist Dynkin-System, falls

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$

(ii) $A, B \in \mathcal{D}$ und $A \subseteq B \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ und $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$

$$\Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}.$$

Bew: • $\Omega \in \mathcal{D}$ wegen (i) ✓

• Für $A \in \mathcal{D}$ gilt mit (ii) $\Omega \setminus A = A^c \in \mathcal{D}$.

• Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt.
Definiere $A_n' := \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k$. Es gilt $A_n' \subseteq A_{n+1}'$
und

$$\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'}_{\in \mathcal{D}} \in \mathcal{D} \text{ nach (iii)}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System

b) Vorr.: $|\Omega| = 2n \geq 4, n \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{D} := \{D \subseteq \Omega \mid |D| \text{ ist gerade}\}$.

(i) Beh.: $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System.

Bew.: 1) $\Omega \in \mathcal{D}$, da $|\Omega| = 2n$, $n \in \mathbb{N}$

2) Sei $A \in \mathcal{D}$. Da $A \in \mathcal{D}$ gilt
$\exists m \leq n: |A| = 2m$.
Für A^c gilt $|A^c| = |\Omega| - |A| = 2 \cdot \underbrace{(n-m)}_{=:\ell}$, $= 2\ell$
daraus folgt $A^c \in \mathcal{D}$.

$A^c = \{w \in \Omega : w \notin A\}$

$|\{w \in \Omega \wedge w \notin A\}|$

$|\Omega| - |A|$

3) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt,
mit $|A_n| = 2m_n$, $m_n \in \mathbb{N}$.
Beobachtung: Da Ω endlich ist, kann es nur endlich viele (disjunkte) Teilmengen geben. Also betrachtet man nur eine endliche Folge $A_1, \ldots, A_N$.

$$\left|\dot{\bigcup_{k=1}^{N}} A_k\right| \overset{\text{disjunkt}}{=} \sum_{k=1}^{N} |A_k| \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{N} 2m_k$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} 2 \sum_{k=1}^{N} m_k = 2\ell, \ \ell \in \mathbb{N}$$

Damit folgt $\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k \in \mathcal{D}$.

$\Rightarrow \mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System

(ii) Beh: $\mathcal{D}$ ist keine σ-Algebra. (Mit Gegenbsp.)

Lsg: Sei $\Omega = \{a,b,c,d\}$, dann sind z. B. $\{a,b\} \in \mathcal{D}$ und $\{b,c\} \in \mathcal{D}$, aber

$\{a,b,c\} = \{a,b\} \cup \{b,c\} \notin \mathcal{D}$. Da aber jede σ-Alg. abgl. unter Vereinigung ist, kann $\mathcal{D}$ keine σ-Alg. sein

(iii) Beh: $\mathcal{D}$ ist keine σ-Algebra (Mit Satz 1.2.9.)

Lsg: Satz 1.2.9:

Dynkin-System $\mathcal{D}$ $\cap$-stabil $\iff \mathcal{D}$ ist σ-Algebra

$\{a,b\} \cap \{b,c\} = \underbrace{\{b\}}_{\notin \mathcal{D}}$

$\mathcal{D}$ ist nicht $\cap$-stabil (betrachte wie in (ii) $\Omega = \{a,b,c,d\}$) und damit keine σ-Algebra.

(iv) Ges: Charakterisierung von $\sigma(\mathcal{D}) \setminus \mathcal{D}$

Lsg. Es gilt $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{P}(\Omega)$ (Durch Schnitte können alle Elementarereignisse $\{\omega\}$ erzeugt werden und durch (endl.) Vereinigungen alle Teilmengen von Ω.)

Damit gilt $\mathcal{P}(\Omega) \setminus \mathcal{D} = \{A \subseteq \Omega \mid |A| \text{ ungerade}\}$

↳ Menge aller TM, mit gerader Anzahl an Elementen

geg.: $\mathbb{P}$ ist W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
und die Funktion
$$F: \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \mapsto F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x])$$
ist die Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$

Beh.: a) $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
b) F ist monoton steigend
c) F ist rechtsstetig
d) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

Bew.: a) Per Def. gilt $F(x) = \mathbb{P}(\underbrace{(-\infty, x]}) \ \forall x \in \mathbb{R}$
Da W-Maß gilt
$$0 \leq \mathbb{P}(\underbrace{(-\infty, x]}_{\subseteq \mathbb{R}}) \underset{\text{Monotonie von Maßen}}{\leq} \mathbb{P}(\mathbb{R}) \overset{\text{W-Maß}}{=} 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$. Dann gilt
$(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$ und somit auch
$\mathbb{P}((-\infty, x]) \leq \mathbb{P}((-\infty, y])$ wegen Monotonie von Maßen
$\Rightarrow F(x) \leq F(y)$
$\Rightarrow F$ monoton steigend

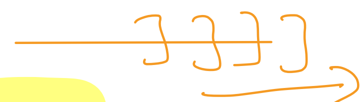
c) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.
Dann ist $((-\infty, x_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folgen von Mengen aus $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $(-\infty, x_{n+1}] \subseteq (-\infty, x_n]$. $\forall n \in \mathbb{N}$

Zudem gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n] = (-\infty, x]$.

Mit Stetigkeit von Maßen und da $\mathbb{P}$ endlich ist,
↳ da W-Maß
folgt

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) \overset{\text{Def } F}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((-\infty, x_n]) \overset{\text{Stetigkeit von Maßen}}{=} \mathbb{P}((-\infty, x]) \overset{\text{Def.}}{=} F(x).$$

d) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$, $y_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mon. fallend, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mon. steigend.



Dann gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n] = \emptyset$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, y_n] = \mathbb{R}$

Mit Stetigkeit von Maßen und da $\mathbb{P}$ endlich ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) \overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((-\infty, x_n]) \overset{\text{Stetigkeit von Maßen}}{=} \mathbb{P}(\emptyset) \overset{\text{Eig. von Maßen}}{=} 0$$

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((-\infty, y_n]) \underset{\text{Stetigkeit von Maßen}}{=} \mathbb{P}(\mathbb{R}) \overset{\text{W-Maß}}{=} 1 \quad \square$$

$\mathcal{E}_1 := \{(a,\infty),\ a\in\mathbb{R}\}$

$\mathcal{E}_2 := \{[a,b],\ a,b\in\mathbb{R},\ a\le b\}$

Beh: $\sigma(\mathcal{E}_1)=\sigma(\mathcal{E}_2)=\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Bew: Sei $\mathcal{E}:=\{(a,b): a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$

Nach VL gilt $\sigma(\mathcal{E})=\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wir zeigen Ringschluss

$$\sigma(\mathcal{E}_1)\subseteq\sigma(\mathcal{E})=\mathcal{B}(\mathbb{R})\subseteq\sigma(\mathcal{E}_2)\subseteq\sigma(\mathcal{E}_1)$$

$\mathcal{E}_1\subseteq\sigma(\mathcal{E})$

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_1)\subseteq\sigma(\sigma(\mathcal{E}))=\sigma(\mathcal{E})$

- $\mathcal{E}_1\subseteq\sigma(\mathcal{E})$: Sei $a\in\mathbb{R}$. Dann gilt $\underbrace{(a,\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{(a,a+n)}_{\sigma(\mathcal{E})}}_{\sigma(\mathcal{E})}$ → Def $\mathcal{E}$; da abz. $\cup$ wieder drin

  $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_1)\subseteq\sigma(\mathcal{E})$

- $\mathcal{E}\subseteq\sigma(\mathcal{E}_2)$: Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$

  Dann gilt $(a,b)=\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{\left[a+\frac{(b-a)}{2n},\ b-\frac{(b-a)}{2n}\right]}_{\in\sigma(\mathcal{E}_2)}}_{\in\sigma(\mathcal{E}_2)}$ → Def $\mathcal{E}_2$

  da abz. $\cup$ wieder in σ-Alg.

  $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E})\subseteq\sigma(\mathcal{E}_2)$

- $\mathcal{E}_2\subseteq\sigma(\mathcal{E}_1)$: Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a\le b$

  Dann gilt $[a,b]=\underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{\underbrace{\left(a-\frac{(b-a)}{2n},\infty\right)}_{\in\sigma(\mathcal{E}_1)}\setminus\underbrace{(b,\infty)}_{\in\sigma(\mathcal{E}_1)}}_{\in\sigma(\mathcal{E}_1)}}_{\in\sigma(\mathcal{E}_1)}$ → Def $\mathcal{E}_1$ → ist drin, da σ-Algebra → da $\cap$-stabil

  $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_2)\subseteq\sigma(\mathcal{E}_1)$

b) $\Omega=\{a,b,c,d\}$ $\quad\mathcal{E}=\{\{a,b\},\{d\}\}$

Beh: $\mathcal{A}:=\{\emptyset,\Omega,\{a,b\},\{d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{c\}\}=\sigma(\mathcal{E})$

Bew:

- $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra über Ω, Eigenschaften checken.
- Es gilt $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{A}$
- Für jede σ-Algebra $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ mit $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{B}$ gilt $\mathcal{B}=\mathcal{A}$, da

$\{a,b\}, \{d\}, \emptyset, \Omega, \{a,b\}^c, \{d\}^c, \{a,b,d\}, \{a,b,d\}^c \in \mathcal{B}$

sein müssen.

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ ist die kleinste σ-Algebra die

$\mathcal{E}$ enthält

$\Rightarrow$ $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \mathcal{B}$$

$\mathcal{B}$ σ-Algebra

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$

Vorr: $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ und $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$.

Beh: $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2)) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2))$

Bew: „$\subseteq$": Es gilt $\mathcal{E}_2 \overset{\text{Extensivität}}{\subseteq} \sigma(\mathcal{E}_2)$,

$\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{E}_2) \overset{\text{Mon.}}{\subseteq} f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2))$ → Monotonie d. Urbilder

Nach ÜB1 Aufgabe 1 ist $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2))$ eine σ-Alg.

$\Rightarrow \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2)) \overset{\text{Mon.}}{\subseteq} \sigma(f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2))) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2))$

„$\supseteq$": Betrachte

$C := \{B \subseteq \Omega_2 \mid f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))\}$.

(i) C ist σ-Alg.

- $\Omega_2 \in C$, da $f^{-1}(\Omega_2) \overset{\text{Ana}}{=} \Omega_1 \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$, da $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$ σ-Algebra
- $A \in C \Rightarrow f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$

  $\overset{\text{Def. } \sigma\text{-Alg.}}{\Rightarrow} f^{-1}(A)^c \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$ stabil unter Komplementbildung

  $\overset{\text{Regeln für Urbilder}}{\Rightarrow} f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$

  $\Rightarrow A^c \in C$
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{C} \Rightarrow f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), \ldots \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$

  $\overset{\text{Def. } \sigma\text{-Alg.}}{\Rightarrow} \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(A_k) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$, da $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$ abg. unter abz. $\cup$

  $\overset{\text{Regeln für Urbilder}}{\Rightarrow} f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$

  $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in C$.

(ii) Per Def. $f^{-1}(C) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$

da $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ eben $f^{-1}(\mathcal{E})$ enthält

(iii) $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{C}$, mit i) $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(C) \overset{\text{i)}}{=} C$

$\Rightarrow f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2)) \subseteq f^{-1}(C)$, Monotonie der Urbilder

Zusammen (i) – (iii):

$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2)) \subseteq f^{-1}(C) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$ $\square$

$- A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{C} \Rightarrow f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), \ldots \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$

$$\overset{\text{Def. } \sigma\text{-Alg.}}{\Rightarrow} \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(A_k) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$$

$$\overset{\text{Regeln für Urbilder}}{\Rightarrow} f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{C}.$$

(ii) Per Def. $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$

(iii) $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{C}$, mit (i) $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{C}$

$\Longrightarrow f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2)) \subseteq f^{-1}(\mathcal{C})$

Zusammen (i) – (iii):

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2)) \subseteq f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2)) \quad \square$$

Aufgabe 5

Vorr.: $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_1)$, $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$ Semiringe und $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ σ-Alg. über Ω_1 und Ω_2.

a) Beh.: $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ ist ein Semiring

Bew.: (i) $\emptyset \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, weil $\emptyset \in S_1$ und $\emptyset \in S_2$ $(\emptyset = \emptyset \times \emptyset)$

(ii) $(A_1 \times A_2), (B_1 \times B_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$,

$A_1, B_1 \in \mathcal{S}_1$ und $A_2, B_2 \in \mathcal{S}_2$.

Dann gilt

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) \overset{\substack{\text{Mengen-}\\ \text{lehre}}}{=} \underbrace{(A_1 \cap B_1)}_{\in \mathcal{S}_1} \times \underbrace{(A_2 \cap B_2)}_{\in \mathcal{S}_2} \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$$

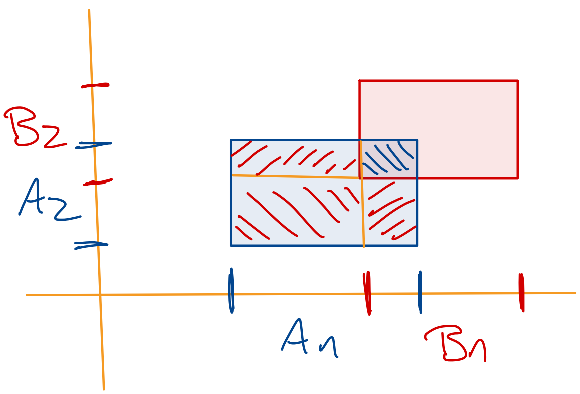
, da Semiringe $\cap$-stabil

(iii) Es gilt

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = \Big[\underbrace{(A_1 \setminus B_1)}_{= \dot\bigcup_{k=1}^{m_1} C_k^1} \times \underbrace{(A_2 \setminus B_2)}_{= \dot\bigcup_{k=1}^{m_2} C_k^2}\Big] \overset{(*)}{\dot\cup}$$

$$\Big[\underbrace{(A_1 \setminus B_1)}_{= \dot\bigcup_{k=1}^{m_3} C_k^3} \times \underbrace{(A_2 \cap B_2)}_{\in \mathcal{S}_2}\Big] \overset{(**)}{\dot\cup}$$

$$\Big[\underbrace{(A_2 \setminus B_2)}_{= \dot\bigcup_{k=1}^{m_4} C_k^4} \times \underbrace{(A_1 \cap B_1)}_{\in \mathcal{S}_1}\Big]. \quad (***)$$



Die kartesischen Produkte der disjunkten Vereinigungen (*) – (***) lassen sich als disjunkte Vereinigungen kartesischer Produkte $(C_1^1 \times C_1^2 \,\dot\cup\, C_2^1 \times C_1^2 \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, C_{m_1}^1 \times C_{m_2}^2)$ umschreiben. Somit lässt sich die Differenz als disjunkte Vereinigung von Mengen der Form $\underset{\in \mathcal{S}_1}{C} \times \underset{\in \mathcal{S}_2}{D}$ darstellen

$\square$

b) <u>Beh:</u> $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ ist $\cap$-stabil.

<u>Bew:</u> Jede σ-Algebra ist ein Semiring (vgl. VL)

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ ist ein Semiring nach (a)

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ ist $\cap$-stabil.

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ ✓ $\Omega \in \mathcal{A}$ und

$\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{A}$

ii) $A, B \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

iii) $A, B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$

$A \setminus B \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow A \setminus B = C_i$

$n = 1$

Also $A \setminus B = \dot{\bigcup}_{i=1}^{1} C_i = C_i$