Aufgabe 1

a) <u>Vorr:</u> $\mathcal{A}$ σ-Alg über Ω und $A \in \mathcal{A}$.

<u>Beh:</u> $\mathcal{A}_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}$ ist σ-Alg über A

<u>Bew:</u> (i) $A \in \mathcal{A}_A$, da $\Omega \cap A = A$ und $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) Sei $B \cap A \in \mathcal{A}_A$.

$(B \cap A)^c$

$$\underline{A \setminus (A \cap B)} \overset{\text{Def}}{=} A \cap (A \cap B)^c$$

$$\overset{\text{De Morgan}}{=} A \cap (A^c \cup B^c)$$

$$= \underline{(A \cap A^c)} \cup (A \cap B^c)$$

$A \cap A^c = \emptyset$

$$= B^c \cap A$$

Weil $B \in \mathcal{A}$ ist $B^c \in \mathcal{A}$. Also ist $B^c \cap A \in \mathcal{A}_A$.

(iii) Seien $C_1, C_2, \ldots \in \mathcal{A}_A$. Also existieren $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $B_1 \cap A = C_1$, $B_2 \cap A = C_2, \ldots$.

Es gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \overset{\text{Def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} (\underline{B_k} \cap A)$$

$$\overset{\text{Ana}}{=} \underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)}_{\in \mathcal{A}} \cap A \in \mathcal{A}_A,$$

da $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$.

b) Vorr: $f: \Omega_1 \to \Omega_2$, $\mathcal{A}_2$ σ-Alg. über Ω_2.

Beh: $\mathcal{A}_1 := f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \{f^{-1}(A_2) \mid A_2 \in \mathcal{A}_2\}$
ist σ-Alg. über Ω_1.

Bew: (i) $\Omega_1 \in \mathcal{A}_1$, da $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$ und $\Omega_2 \in \mathcal{A}_2$

(ii) Sei $B := f^{-1}(A)$, $A \in \mathcal{A}_2$. Dann ist

$$B^c = (f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c) \in \mathcal{A}_1$$

weil $A^c \in \mathcal{A}_2$.

(iii) Seien $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}_1$ und $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_2$
mit $B_1 = f^{-1}(A_1), B_2 = f^{-1}(A_2), \ldots$. Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \overset{\text{Def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(A_k) \overset{\text{Eig. Urbild}}{=} f^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}_{\in \mathcal{A}_2}\Big) \in \mathcal{A}_1,$$

da $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}_2$.

c) Vorr: $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ σ-Alg über Ω_1 und Ω_2

Beh: $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ im Allg. keine σ-Alg. über $\Omega_1 \times \Omega_2$

Bew: $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ sind σ-Algebren

$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$

Sei $B := \{(a,a)\}$.

Es gilt $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ und $B \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Allerdings ist $(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus B \notin \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$

Damit ist $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ keine σ-Alg.

d) <u>Vorr:</u> $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, μ endl. Maß und $A_1, A_2, B \in \mathcal{A}$

<u>Beh:</u> Für $A_1, A_2 \subseteq B$ gilt

$$\mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)) = \mu(B) - \mu(A_1) - \mu(A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)$$

<u>Bew:</u>

$$\mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)) = \mu(B) - \mu((A_1 \setminus A_2) \dot\cup (A_2 \setminus A_1) \dot\cup (A_1 \cap A_2))$$

$$\overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \mu(B) - \mu(A_1 \setminus A_2) - \mu(A_2 \setminus A_1) - \mu(A_1 \cap A_2)$$

$$\overset{\pm 0}{=} \mu(B) - \mu(A_1 \setminus A_2) - \mu(A_2 \setminus A_1) - \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$$

$$= \mu(B) - (\mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)) - (\mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_1 \cap A_2)) + \mu(A_1 \cap A_2)$$

$$= \mu(B) - \mu((A_1 \setminus A_2) \dot\cup (A_1 \cap A_2)) - \mu((A_2 \setminus A_1) \dot\cup (A_1 \cap A_2)) + \mu(A_1 \cap A_2)$$

$$\overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \mu(B) - \mu(A_1) - \mu(A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)$$

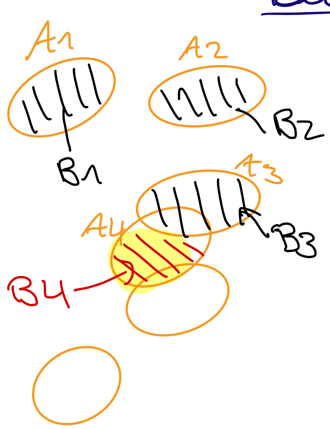
e) <u>Vorr:</u> $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ bel.

<u>Beh:</u>

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Sub-σ-Additivität

<u>Bew:</u> Definiere $B_1 := A_1$, $B_n := A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$, $\forall n \geq 2$

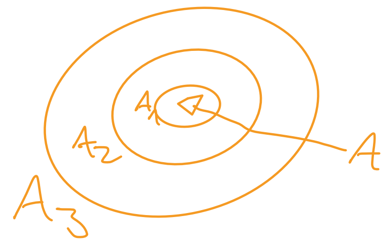


Damit gilt $\dot\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ und $B_k \subseteq A_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Daraus folgt $\mu(B_k) \leq \mu(A_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und zusammen

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \overset{\text{Def } B_k}{=} \mu\left(\dot\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \overset{\sigma\text{-Additivität}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

$\square$



Aufgabe 2

Vorr: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow A$ und es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{n_0}) < \infty$.

Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ $\qquad A_n \supseteq A_{n+1} \ldots$

Bew: Aus $A_n \downarrow A$ folgt $(A_{n_0} \setminus A_n) \uparrow (A_{n_0} \setminus A)$ und damit

$$\mu(A_{n_0} \setminus A_n) \uparrow \mu(A_{n_0} \setminus A) \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Da $\mu(A_{n_0}) < \infty$ und $A_n \subseteq A_{n_0}$ für $n \geq n_0$ gilt, ist

$$\mu(A_{n_0} \setminus A_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_n), \quad n \geq n_0$$

und

$$\mu(A_{n_0} \setminus A) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A).$$

Zusammen gilt $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$,

da

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_{n_0} \setminus A_n) \overset{\text{Eig. Maße}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n_0}) - \mu(A_n) \overset{\text{Def lim}}{=} \mu(A_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$$\mu(A_{n_0} \setminus A) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mu(A_{n_0}) - \mu(A) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$-\mu(A_{n_0})$

$$\Longleftrightarrow \quad -\mu(A) = -\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

Aufgabe 3

a) Vorr: $(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Maßen auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Beh: $\mu := \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$ ist ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Bew: 1) Für alle $A \in \mathcal{A}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mu_n(A) \geq 0$, damit folgt $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A) \geq 0$.
Also $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$.

2) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mu_n(\emptyset) = 0$, also $\mu(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\emptyset) = 0$

3) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Folge von Mengen in $\mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k\right) \overset{\text{Def } \mu}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\mu_i\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k\right)} \overset{\sigma\text{-Add. der einz. } \mu_i}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_i(A_k)}$$

$$\overset{\text{alle Summ. } \geq 0 \text{ Fubini}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A_k)}_{\|} \overset{\text{Def } \mu}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad \Rightarrow \sigma\text{-Additivität gilt}$$

$$\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot \mathbb{P}_i$$

b) <u>Ges:</u> Forderungen an $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ damit $\mathbb{P}$ ein W-Maß ist.

<u>Lsg.:</u> Es gilt für ein Maß μ und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dass $\mu_c := c \cdot \mu$ wieder ein Maß ist. Damit folgt mit a), dass für $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}$ ein Maß ist.

Für jedes $\mathbb{P}_n$ gilt $\mathbb{P}_n(\Omega) = 1$. Damit folgt

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot 1 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i .$$

Also muss auch $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = 1$ gelten.

<u>Zusammen:</u>

$\mathbb{P}$ ist ein W-Maß, falls

$$c_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} c_i = 1$$

gilt.

Aufgabe 4

Vorr: Ziehe blind zwei von vier Kugeln

a) Ges: Modell des W-Raums

alle Tupel, die wir ziehen können

Lsg: $\Omega := \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$.

$\{3,1\}$

Für σ-Alg $\mathcal{A}$ wähle $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$.

Da alle Elementarereignisse $\omega \in \Omega$ gleichwahrscheinlich sind gilt

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6} \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Mit σ-Additivität folgt dann für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6}.$$

b) (i) $A_1 \mathrel{\hat{=}}$ Die Summe der Kugeln ist größer als 5

$A_1 = \{\{2,4\},\{3,4\}\}$ und mit a)

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{|A_1|}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) $A_2 \hat{=}$ Das Produkt der Kugeln ist ungerade

$A_2 = \{\{1,3\}\}$ und mit a)

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{|A_2|}{6} = \frac{1}{6}$$

(iii) $A_3 \hat{=}$ Das Produkt der Kugeln ist gerade

$A_3 = A_2^c$, weil $\mathbb{P}$ endl. und mit (ii) gilt

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(\Omega \setminus A_2) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(A_2) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(iv) $A_4 \hat{=}$ Die Kugel Nummer 3 oder Nummer 4 wird gezogen.

$A_4 = \{\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ und mit a)

$$\mathbb{P}(A_4) = \frac{|A_4|}{6} = \frac{5}{6}$$