Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Lösung Ü9

1. *(16 Punkte)*
Skizzieren Sie (mit Begründung) die Phasenportraits der ebenen autonomen Systeme

(a)
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2. \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2. \end{cases}$$

Lösung:
Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung $x' = Ax$ und untersuchen das Stabilitätsverhalten durch Analyse der Matrix A.

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Eigenwerte:

$$p(\lambda) = \det\left(\lambda\mathbb{1} - A\right) = (\lambda - 2)(\lambda + 3) - 6 \overset{!}{=} 0.$$

Damit erhalten wir $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 3$. Wir führen nun einen Basiswechsel durch und formen die DGL in die folgende, äquivalente DGL ($x = Cy$) um:

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1, \\ y_2' = \lambda_2 y_2. \end{cases}$$

Wähle dazu $C = [v_1, v_2]$, wobei v_1, v_2 zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ bzw. λ sind.

Wegen $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ haben wir einen Sattelpunkt.

(Vgl. Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme (Prüss, Wilke), S. 87, Abb. 5.2)

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Eigenwerte:

$$p(\lambda) = \det\big(\lambda\mathbb{1} - A\big) = (\lambda - 3)(\lambda - 1) \overset{!}{=} 0.$$

Damit erhalten wir $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$. Die Eigenwerte kann man auch direkt auf der Hauptdiagonalen der Matrix ablesen, da die Matrix eine untere Dreiecksmatrix ist. Wieder können wieder mit einem Basiswechsel die DGL in die folgende äquivalente DGL umformen:

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1, \\ y_2' = \lambda_2 y_2. \end{cases}$$

Wegen $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ haben wir einen instabilen Knoten.

(Vgl. Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme (Prüss, Wilke), S. 88, Abb. 5.3, rechts)

(c)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Eigenwerte:

$$p(\lambda) = \det\big(\lambda\mathbb{1} - A\big) = (\lambda + 3)(\lambda + 1) + 1 = (\lambda + 2)^2 \overset{!}{=} 0.$$

Damit erhalten wir $\lambda_1 = \lambda_2 = -2 := \lambda$ (algebraische Vielfachheit 2, $m(-2) = 2$).

Da die geometrische Vielfachheit (Dimension des Eigenraums) vom Eigenwert $\lambda = -2$ nur 1 beträgt, ist A nicht diagonalisierbar und $\lambda = -2$ nicht halbeinfach. Trotzdem können wir die Lösungen dieser DGL explizit angeben:

$$\begin{cases} y_1(t) = (k_1 + tk_2)e^{\lambda t}, \ k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \\ y_2(t) = k_3 e^{\lambda t}, \ k_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Die Phasenportraits sind ein falscher Knoten, wegen $\lambda < 0$ haben wir einen stabilen falschen Knoten.

(Vgl. Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme (Prüss, Wilke), S. 89, Abb. 5.5, links)

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Eigenwerte:

$$p(\lambda) = \det\big(\lambda\mathbb{1} - A\big) = (\lambda - 1)(\lambda - 1) + 2 \overset{!}{=} 0.$$

Wir sehen, dass diese quadratische Funktion für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ nur positive Werte annimmt, das Minimum liegt bei $\lambda = 1,\ p(1) = 2$. Es gibt also keinen reellen Schnittpunkt mit der λ-Achse (X-Achse). Die Eigenwerte sind somit komplex. Damit erhalten wir $\lambda_1 = 1 - i\sqrt{2}$ und $\lambda_2 = \bar{\lambda_1} = 1 + i\sqrt{2}$.

Die Matrix ist komplex diagonalisierbar (analog zum 1. und 2. Fall), wir erhalten die äquivalente DGL:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - \sqrt{2}y_2, \\ y_2' = y_1 + \sqrt{2}y_2. \end{cases}$$

Wegen $Re(\lambda_1) > 0$ haben wir eine instabile Spirale.

(Vgl. Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme (Prüss, Wilke), S. 91, Abb. 5.7, rechts)

2. *(4 Punkte)*
Sei $Y(t)$ ein Fundamentalsystem für $y' = A(t)y$. Beweisen Sie: $y_* = 0$ ist genau dann attraktiv, wenn $|Y(t)| \to 0$ für $t \to \infty$ gilt.

Beweis.
$\Rightarrow$

Sei $y_* = 0$ asymptotisch stabil für $y'(t) = A(t)y(t)$. Dann existiert ein $\delta_0 > 0$, sodass

$$|y(t)| = |Y(t)Y^{-1}(t_0)y_0| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall |y_0| \leq \delta_0.$$

Sei nun $v \in \mathbb{R}$ beliebig und definiere $y_0 := \frac{\delta_0 Y(t_0)v}{|Y(t_0)v|}$. Dann gilt:

$$|Y(t)v| = \delta_0^{-1}|Y(t_0)v||Y(t)Y^{-1}(t_0)y_0| \to 0.$$

Für $t \to \infty$ und alle $v \in \mathbb{R}^n$. Da v beliebig folgt $|Y(t)| \to 0$ für $t \to \infty$.

$\Leftarrow$

Es gelte $|Y(t)| \to 0$ für $t \to \infty$. Wir nutzen

$$|y(t)| = |Y(t)Y^{-1}(t_0)y_0| \leq |Y(t)||Y^{-1}(t_0)y_0| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit ist $y_* = 0$ attraktiv.