Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Lösung Ü7

1. *(9 Punkte)*
   Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden:

   (a) $y'''' + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.
   (b) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.
   (c) $y''' + 4y' = 4\cot 2x$.

   Lösung

   (a) Forme diese Differentialgleichung ins DGL-System 1. Ordnung und erhalte :

$$z_1 = y, z_2 = z_1', z_3 = z_2', z_4 = z_3'$$

und

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ -4z_4 - 8z_3 - 8z_2 - 4z_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & -8 & -4 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

Berechne das charakteristisches Polynom von A und erhalte, dass

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0.$$

Substituire λ mit $\lambda = h - 1$ und erhalte $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = (h-1)^4 + 4(h-1)^3 + 8(h-1)^2 + 8(h-1) + 4 = h^4 - 4h^3 + 6h^2 - 4h + 1 + 4h^3 - 12h^2 + 12h - 4 + 8h^2 - 16h + 8 + 8h - 8 + 4 = h^4 + 2h^2 + 1 = (h^2+1)^2 = 0 \Rightarrow ((\lambda+1)^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$
$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 + i$ (doppelt) und $\lambda_{3,4} = -1 - i$ (doppelt). $\lambda_{1,2}$ und $\lambda_{3,4}$ sind komplex konjugiert, deswegen können wir nur $\lambda_{1,2}$ betrachten.

$$y = e^{(-1+i)t} = e^{-t}e^{it} = e^{-t}(\cos(t) + i\sin(t)) = e^{-t}\cos(t) + ie^{-t}\sin(t).$$

Weil wir zwei doppelte Eigenwerte haben, bekomen wir ein Fundamentalsystem

$$\text{FS} : \{e^{-t}\cos(t), e^{-t}\cos(t)t, e^{-t}\sin(t), e^{-t}\sin(t)t\}.$$

und daher lautet die Lösung:

$$y = e^{-t}((C_1 + C_2 t)\cos(t) + (C_3 + C_4 t)\sin(t)), \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

(b) Forme diese Differentialgleichung ins DGL-System 1. Ordnung und erhalte:

$$z_1 = y, z_2 = z_1'$$

und

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ 3z_2 - 2z_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Berechne das charakteristisches Polynom von A und erhalte, dass

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

Daher ist $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ und $y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Setze $y(0) = 2$ und $y'(0) = -3$ und erhalte ein LGS:

$$C_1 + C_2 = 2,$$

$$C_1 + 2C_2 = -3.$$

Folglich $C_1 7, C_2 = -7$ und damit ist unsere Lösung $y = 7e^x - 5e^{2x}$.

(c) Forme diese DGL ins DGL-System 1. Ordung

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\cot(2x) \end{pmatrix}.$$

Löse das homogene System. das charakteristisches Polynom:

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda \quad \implies \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i.$$

Daher erhalten wir das Fundamentalsystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(2x) & \sin(2x) \\ 0 & -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \\ 0 & -4\cos(2x) & -4\sin(2x)) \end{pmatrix}$$

und folglich ist die Lösung der homogenen DGL gegeben durch

$$y_h = C_1 + C_2\cos(2x) + C_3\sin(2x), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Jetzt wenden wir die Methode der Variation der Konstante an, um eine spezielle Lösung zu bestimmen:

$$y_s = C_1(x) + C_2(x)\cos(2x) + C_3(x)\sin(2x)$$

$$\implies \quad y_s' = C_1'(x) + C_2'(x)\cos(2x) - 2C_2(x)\sin(x) + C_3'(x)\sin(2x) + 2C_3(x)\cos(2x)$$

y_s löst die inhomogene DGL genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) + C_2'(x)\cos(2x) + C_3'(x)\sin(2x) \\ -2C_2'(x)\sin(2x) + 2C_3'(x)\cos(2x) \\ -4C - 2'(x)\cos(2x) - 4C_3'(x)\sin(2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\cot(2x) \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$C_1'(x) = \cot(2x) \quad \Longrightarrow \quad C_1(x) = \ln(|\sin(2x)|),$$

$$C_2'(x) = -\cos^2(2x)\csc(2x) \quad \Longrightarrow \quad C_2(x) = -\frac{1}{2}\ln(|\tan(x)| - \frac{1}{2}\cos(2x),$$

$$C_3'(x) = -\cos(2x) \quad \Longrightarrow \quad C_3(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x).$$

Daher ist

$$y_s = \ln(|\sin(2x)|) - \frac{1}{2}\cos(2x)\ln(|\tan(x)|) - \frac{1}{2}.$$

Die allgemeine Lösung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_s \\ &= C_1 + C_2\cos(2x) + C_3\sin(2x) + \ln(|\sin(2x)|) \\ &\quad -\frac{1}{2}\cos(2x)\ln(|\tan(x)|) - \frac{1}{2}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Genauer sind

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \cot(2x)\,dx = \int \frac{1}{\tan(2x)}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\tan(2x)}\,d(2x) = \frac{1}{2}\int \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\,d(2x) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin(2x)}\,d(\sin(2x)) = \frac{1}{2}\ln|\sin(2x)| \\ C_2(x) &= \int -\cos^2(2x)\csc(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1-\sin^2(2x)}{\sin(2x)}\,d(2x) \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin(2x)}\,d(2x) + \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,d(2x) \\ &= -\int \frac{\cos(x)}{2\sin(x)\cos^2(x)}\,dx - \frac{1}{2}\cos(2x) \\ &= -\int \frac{1}{2\tan(x)}\,d(\tan(x)) - \frac{1}{2}\cos(2x) \\ &= -\frac{1}{2}\ln(|\tan(x)|) - \frac{1}{2}\cos(2x) \\ C_3(x) &= \int -\cos(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int \cos(2x)\,d(2x) \\ &= -\frac{1}{2}\sin(2x). \end{aligned}$$

Bemerkung:
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
$\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$
$\csc(2x) - \cot(2x) = \tan(x)$

2. *(5 Punkte)*
Sei $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz, $J = [a, b]$, und $\phi \in C^1(J)$ die Lösung von

$$\phi' = \omega(\phi), \quad \phi(a) = \phi_0.$$

Es sei $\varphi \in C^1(J)$, und gelte

$$\varphi'(t) \le \omega(\varphi(t)), \quad t \in J, \quad \varphi(a) \le \phi_0.$$

Zeigen Sie $\varphi(t) \le \phi(t)$ für alle $t \in J$.
Tipp: Die Behauptung zunächst im Falle strikter Ungleichungen beweisen; danach geeignet stören und mit dem Satz über stetige Abhängigkeit den allgemeinen Fall zeigen.
Beweis.
Im ersten Schritt beweisen wir die Behauptung im Falle der strikten Ungleichung, d.h., Falls $\varphi'(t) < \omega(\varphi(t))$, $t \in J$, $\varphi(a) < \phi_0$, dann $\varphi(t) < \phi(t)$ (*).

Angenommen es existiert $t_* \in (a,b]$ mit $\varphi(t) < \phi(t)$ für alle $t \in [a, t_*)$ und $\varphi(t_*) = \phi(t_*)$.

Dann gilt für hinreichend kleine $h > 0$, dass

$$\frac{\varphi(t_*) - \varphi(t_* - h)}{h} > \frac{\phi(t_*) - \phi(t_* - h)}{h}.$$

Aus der Differinzierbarkeit von ϕ und φ folgt für $h \to 0_+$

$$\varphi'(t_*) \ge \phi'(t_*) = \omega(\phi(t_*)) = \omega(\varphi(t_*)).$$

Das ist ein Widerspruch, da nach unser Annahme gilt: $\varphi(t_*) < \omega(\varphi(t_*))$ gilt. Daher gilt (*).

Nun setzen wir $\omega_n(\cdot) = \omega(\cdot) + \dfrac{1}{n}$.
Sei $\phi_n(t)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} \phi_n' &= \omega_n(\phi_n), \\ \phi_n(t_0) &= \phi_0 + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Dann gilt $\varphi' \le \omega(\varphi) < \omega(\varphi) + \frac{1}{n}$ und $\varphi(t_0) \le \phi_0 < \phi_0 + \frac{1}{n}$. Daher folgt, dass $\varphi(t) < \phi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}, t \in J$.

Nach Satz 4.1.2 ist die Lösung ϕ stetig von den Daten abhängig, also folgt aus Korollar 4.1.4 $\phi_n(t) \to \phi(t)$ gleichmäßig auf J und liefert $\varphi(t) \le \phi(t)$ für alle $t \in J$.

3. *(6 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, lokal Lipschitz in x und gelte $(f(t,x)|x) \le 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+, |x| = R$. Sei $|x_0| \le R$. Dann existiert die Lösung $x(t)$ von

$$x' = f(t,x), \quad x(0) = x_0,$$

global und es gilt $|x(t)| \le R$ für alle $t \ge 0$.
Tipp: Betrachten Sie zunächst $f_n(t,x) = f(t,x) - x/n$ und verwenden Sie stetige Abhängigkeit.
Beweis.
Setze $f_n(t,x) = f(t,x) - \frac{x}{n}$.vSei $x_n(t)$ die Lösung des AWP's:

$$\begin{aligned} x_n' &= f_n(t, x_n(t)), \\ x_n(0) &= x_{n_0} = x_0 - \frac{x_0}{n}. \end{aligned}$$

Sei zunächst $|x_{n_0}| < R$, dann gilt $|x_n(t) < R|$ (*).

Beweis von (*):

Wir nehmen an, dass (*) falsch ist, dann existiert ein t_* mit $|x_n(t_*)| = R$ und $|x_n(t) < R|$ für alle $0 \leq t < t_*$. Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \, |x_n(t)|_2^2 \, \Big|_{t=t_*} \geq 0.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \, |x_n(t)|_2^2 &= 2 \, (\, x_n'(t) \mid x_n(t)) \\ &= 2 \, (\, f_n(t, x_n(t)) \mid x_n(t)) \\ &= 2 \, (\, f(t, x_n(t)) \mid x_n(t)) - \frac{2 \, |x_n(t)|_2^2}{n}. \end{aligned}$$

Daher $0 \leq \frac{d}{dt} \, |x_n(t)|_2^2 \, \Big|_{t=t_*} \leq -2 \, \frac{R^2}{n} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was ein Widerspruch ist. Daraus folgt (*).

Die Lösung $x_n(t)$ erreicht also niemals den Rand der Kugel $B_r(0)$, falls $|x_{n_0}| < R$.

Im Falle $|x_{n_0}| = R$ gilt

$$\frac{d}{dt} \, |x_n(t)|_2^2 \, \Big|_{t=0} \geq -2 \, \frac{R^2}{n} < 0,$$

also $|x_n(t) < R|$ für kleine $t > 0$.

Allgemein haben schon bewiesen, dass

$$|x_n(t)| < R \text{ für } \; |x_{n_0}| \leq R.$$

Die Lösung $x_n(t)$ ist somit beschränkt und daher existiert nach dem Fortsetzungssatz global. Nun verwenden wir die stetige Abhängigkeit . Nach Satz 4.1.2 ist $x(t)$ stetig von den Daten abhängig. Aus Korollar 4.1.4 folgt, dass $x_n(t) \to x(t)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}_+ \implies |x(t)| \leq R$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Dann folgt sofort die globale Existenz.