Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Lösung Ü6

1. *(3 Punkte)*
Bestimmen Sie sämtliche reellwertige Lösungen des Systems:

(a)
$$\begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = y - x + z \\ z' = x - z \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x' + y' = y + z \\ y' + z' = z + x \\ z' + x' = x + y \end{cases}$$

Lösung

(a) Aus der Aufgabenstellung kann man sofort die Koeffizientenmatrix ablesen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Um die Eigenwerte von A zu bestimmen, berechnen wir das charakteristische Polynom $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix} + (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -2 + (1-\lambda) - (1+\lambda)((1-\lambda)^2 - 2) = -(1+\lambda) - (1+\lambda)((1-\lambda)^2 - 2) = (1+\lambda)(-1-((1-\lambda)^2-2)) = (1+\lambda)(-\lambda^2 + 2\lambda) = (1+\lambda) \cdot \lambda \cdot (2-\lambda) = 0$
Daher enthalten wir folgende Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.
Jetzt müssen wir Eigenvektoren bestimmen.

i. Für $\lambda_1 = 0$,
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des LGS is $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_1 \\ 0 \\ \widetilde{C}_1 \end{pmatrix}$, wobei $\widetilde{C}_1 \in \mathbb{R}$. Wähle den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ als $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ii. Für $\lambda_2 = -1$,

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des LGS is $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{C}_2 \\ -2\widetilde{C}_2 \end{pmatrix}$, wobei $\widetilde{C}_2 \in \mathbb{R}$. Wähle den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ als $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

iii. Für $\lambda_3 = 2$,

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des LGS is $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\widetilde{C}_3 \\ -2\widetilde{C}_3 \\ \widetilde{C}_3 \end{pmatrix}$, wobei $\widetilde{C}_3 \in \mathbb{R}$. Wähle den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$ als $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Im Endeffekt erhalten wir folgende Lösung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= C_1 \cdot e^{0\cdot t} \cdot v_1 + C_2 \cdot e^{-1\cdot t} \cdot v_2 + C_1 \cdot e^{2\cdot t} \cdot v_3 \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Das foldende Gleichungssystem ist gegeben:

$$\begin{cases} x' + y' = y + z \\ y' + z' = z + x \\ x' + z' = x + y \end{cases}$$

Wenn wir alle 3 Gleichungen addieren und beide Seiten durch 2 teilen, bekommen wir

$$\begin{cases} x' + y' = y + z \\ y' + z' = z + x \\ x' + y' + z' = x + y + z \end{cases}$$

Wenn wir die 1. und 2. Gleichungen addieren, dann erhalten wir

$$\begin{cases} x' + 2y' + z' = x + y + 2z \\ y' + z' = z + x \\ x' + y' + z' = x + y + z \end{cases}$$

Setze die 3. Gleichung in die 1. ein und erhalte, dass $y' = z$. Setze $y' = z$ in die 2. Gleichung ein und erhalte $z' = x$. Wenn wie die 2 Ergebnisse in die 3. Gleichung einsetzten, bekommen wir schließlich, dass $x' = y$.

Jetzt sieht das Gleichungssystem folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= z \\ z' &= x \end{aligned}$$

Man kann ganz einfach die Koeffizientenmatrix ablesen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um die Eigenwerte von A zu bestimmen, berechnen wir das charakteristische Polynom $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} + -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 1 = 0.$

Daher erhalten wir 3 Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Jetzt müssen wir Eigenvektoren bestimmen.

(i) Für $\lambda_1 = 1$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des LGS is $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_1 \\ \widetilde{C}_1 \\ \widetilde{C}_1 \end{pmatrix}$, wobei $\widetilde{C}_1 \in \mathbb{R}$. Wähle den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ als $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Wir stellen fest, dass $\bar{\lambda_2} = \lambda_3$, insbesondere sind λ_2 und λ_3 komplex konjugiert, deswegen müssen wir nur den Eigenvektor für λ_2 bestimmen. Bei λ_3 kommt man auf das gleiche Ergebniss.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des LGS is $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_2 \\ \widetilde{C}_2 \cdot (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}) \\ -\widetilde{C}_2 \cdot (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}) \end{pmatrix}$, wobei $\widetilde{C}_2 \in \mathbb{R}$. Wähle den Eigenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$.

Mit der Lösung für $\lambda_1 = 1$ ist alles klar:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die komplexe Lösung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \\
&= e^{(-\frac{1}{2})\cdot t} \cdot e^{(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot t)\cdot i} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \\
&= e^{(-\frac{1}{2})\cdot t} \cdot \left(\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + i \cdot \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \\
&= e^{(-\frac{1}{2})t} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + i \cdot \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ (-\frac{1}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) + i \cdot (-\frac{1}{2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) \\ (-\frac{1}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) + i \cdot (-\frac{1}{2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

In diesem Fall nehmen wir den Realteil und Imaginärteil als Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ -\frac{1}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ -\frac{1}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot t) \\ -\frac{1}{2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ -\frac{1}{2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{pmatrix}.$$

Da $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, ist die Lösung von unsem System der Differentialgleichungen gegeben durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$, wobei $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

2. *(8 Punkte)*
Gegenstand dieser Aufgabe ist die *Exponentialabbildung* (für Matrizen), das heißt die Potenzreihe

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad \text{für Matrizen } A \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

die wir etwa bei der Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten benötigen werden.

(1) Funktionalgleichung der exp-Funktion
Für zwei Matrizen $A,B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt im Allgemeinen nicht $\exp(A+B) = \exp(A)\cdot \exp(B)$. Dies gilt nur, wenn die beiden Matrizen kommutieren, d.h. $[A,B] := AB - BA = 0$.

(i) Zeigen Sie: Falls $[A,B] = 0$ gilt, so gilt die binomische Formel

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

(ii) Begründen Sie kurz, an welcher Stelle bei der binomischen Formel ein Problem entsteht, wenn die Matrizen nicht kommutieren.

(iii) Zeigen Sie mit Teil (i) für kommutierende Matrizen die Formel

$$\exp(A+B) = \exp(A)\cdot \exp(B).$$

[Tipp: Absolute Konvergenz.]

(2) Wie man $\exp(A)$ ausrechnet
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(i) *Basiswechsel.* Ist $C \in GL(n,\mathbb{C})$, so gilt $\exp(CAC^{-1}) = C\cdot \exp(A)\cdot C^{-1}$.

(ii) *Diagonalmatrizen.* Ist $A = \operatorname{diag}(c_1,\dots,c_n)$ mit $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{C}$ eine Diagonalmatrix, so gilt $\exp(A) = \operatorname{diag}(e^{c_1},\dots,e^{c_n})$.

(iii) *Nilpotente Matrizen.* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine nilpotente Matrix in Normalform. Man berechne $\exp(t\cdot A)$ für $t \in \mathbb{R}$.

(iv) *Jordan-Blöcke.* Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein Jordan-Block zum Eigenwert λ. Berechnen Sie $\exp(t\cdot A)$ für $t \in \mathbb{R}$.
[Tipp: (1) in Verbindung mit (2)(ii),(iii).]

Lösung

(1) (i) Beweis mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

I.A. (n=1): $A+B = A^1B^0 + A^0B^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} A^k B^{1-k}$ erfüllt.

I.V. Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

I.S.

$$\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= (A+B)^n(A+B) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}\cdot(A+B)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{k+1}B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}A^kB^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]A^kB^{n+1-k} + A^0B^{n+1} + A^{n+1}B^0\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}A^kB^{n+1-k} + A^0B^{n+1} + A^{n+1}B^0\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^kB^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Mittels vollständiger Induktion folgt die Behauptung.

(ii) Falls $AB \neq BA$, gilt $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$. In obigen Beweis gilt z.B. dann $A^kB^{n-k}A \neq A^{k+1}B^{n-k}$.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}
\exp(A)\cdot\exp(B) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}B^j\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}A^j\frac{1}{(k-j)!}B^{k-j}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}A^jB^{k-j}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A^jB^{k-j}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(A+B)^k\\
&= \exp(A+B).
\end{aligned}$$

(2) (i)

$$\exp(CAC^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(CAC^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}CA^kC^{-1}$$

$$= C\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)C^{-1} = C\cdot\exp(A)\cdot C^{-1}$$

(ii) Sei $A = \mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_n)$. Dann gilt $A^k = \mathrm{diag}(c_1^k,\ldots,c_n^k)$ für $k\in\mathbb{N}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{diag}\left(\frac{c_1^k}{k!}, \cdots, \frac{c_n^k}{k!}\right) \\
&= \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_1^k}{k!}, \cdots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_n^k}{k!}\right) = \operatorname{diag}(e^{c_1}, \ldots, e^{c_n}).
\end{aligned}$$

(iii) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdots, \quad A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^n = 0.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \exp(tA) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^k \\
&= \mathbb{1} + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \frac{t^3}{6} A^3 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} & \ldots & \ldots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(iv) Sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt $tA = t\lambda\mathbb{1} + tN$. Da $t\lambda\mathbb{1}$ und tN kommutieren, ist (a)(iii) anwendbar.

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= \exp(t\lambda\mathbb{1} + tN) = \exp(t\lambda\mathbb{1}) \cdot \exp(tN) \\
&= \operatorname{diag}(e^{t\lambda}, \cdots, e^{t\lambda}) \cdot \exp(tN) \\
&= \exp(t\lambda) \cdot \mathbb{1} \cdot \exp(tN) \\
&= e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} & \dots & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie sämtliche reellwertige Lösungen des Systems.

(a)

$$x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 2z + (2 - t), \\ y' = -x, \\ z' = x + y - z + (1 - t). \end{cases}$$

Lösung

(a) Berechne das charakteristische Polynom von A:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Daher haben wir folgende Eigenwerte: $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ (doppelter Eigenwert). Jetzt möchten wir die entsprechenden Eigenvektoren bestimmen. Für $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{C}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei $\widetilde{C}_1 \in \mathbb{R}$. Wähle einen Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Für $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_2 \\ 0 \\ 2\widetilde{C}_2 \end{pmatrix}$, wobei $\widetilde{C}_2 \in \mathbb{R}$. Wähle einen Eigenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Jetzt sehen wir, dass die geometrische Vielfachheit $(= 1)$ des Eigenwertes -1 kleiner als die algebraische Vielfachheit $(= 2)$.

Wir bestimmen den zusätzlichen Vektor durch den Ansatz $(A - \lambda_2 I)c = v_2$. Bestimme die Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und erhalte, dass $c_2 = 0$ und $2c_1 - c_3 = 1$, insbesondere

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_3 \\ 0 \\ 2\widetilde{C}_3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_3 \\ 0 \\ 2\widetilde{C}_3 - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{C}_3 \in \mathbb{R}$. Wähle $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Im Endeffekt erhalten wir folgende Lösung:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 + 2t \end{pmatrix}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Im ersten Schritt betrachten wir das homogene System mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Das entsprechende charakteristische Polynom lautet:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = -i.$$

Berechne die Eigenvektoren:
Für $\lambda_1 = 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\Longrightarrow$ $a_1 = -a_2$ und $a_3 = 0$.

Folglich ist der Eigenvektor z.B $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

λ_2 und λ_3 sind komplex konjugier, deswegen betrachten wir nur λ_2.

Für $\lambda_2 = i$,

$$\begin{pmatrix} 2-i & 1 & -2 \\ -1 & -i & 0 \\ 1 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\implies b_1 = -ib_2 = b_3$.

Folglich ist der Eigenvektor z.B $v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ und damit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) - i\cos(t) \\ \cos(t) + i\sin(t) \\ \sin(t) - i\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Zerlege $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in Realteil und Imaginärteil und erhalte 2 Vektoren

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Daher lautet die Lösung des homogenen DGL-Systems:

$$\begin{pmatrix} x^h \\ y^h \\ z^h \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Jetzt wenden wir die Methode der Variation der Konstante an, um eine spezielle Lösung zu bestimmen.

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = C_1(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + C_3(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Leite alles nach t ab und erhalte:

$$\begin{pmatrix} x^{*'} \\ y^{*'} \\ z^{*'} \end{pmatrix} = C_1'(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2'(t) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} +$$
$$C_3'(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + C_3(t) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$ löst das inhomogene System genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = C_1(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + C_3(t) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Daher muss gelten:

$$C_1'(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2'(t) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + C_3'(t) \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ C_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \cos(t) + (1-t)\sin(t) \\ -\sin(t) + (1-t)\cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ (t-1)\cos(t) \\ (1-t)\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Setzte das Ergebniss in $(*)$ ein und erhalte eine spezielle Lösung:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = -e^{-t}e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (t-1)\cos(t) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + (1-t)\sin(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Im Endeffekt erhalten wir die allgemeine Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^h \\ y^h \\ z^h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} =$

$$C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

4. *(3 Punkte)*
Bestimmen Sie die Hauptfundamentalmatrix des Systems:

$$x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung
A ist eine obere Dreiecksmatrix, deswegen kann man die Eigenwerte auf der Hauptdiagonale sofort ablesen. $\lambda_1 = 2$; $\lambda_{2,3} = 3$, $\lambda_4 = 1$. Berechne die Eigenvektoren:
Für $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda_4 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda_{2,3} = 3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall sucht man den zusätzlichen Vektor mit dem Ansatz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich lautet das Fundamentalsystem:

$$\text{FS:} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} te^{3t}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} \right\}$$

und die entsprechende Hauptfundamentalmatrix istt gegeben durch

$$H = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}.$$

Weil A nur konstante Koeffizienten ethält , kann man die Hauptfundamentalmatrix mit der Hilfe von Matrixexponentialfunktion ausrechen. Es kommt das Gleiche raus.