Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Lösung Ü5

1. *(6 Punkte)*
Gegeben sei das SIRS-Epodemiemodell

$$u' = -\lambda uv + \gamma w,$$

$$v' = \lambda uv - (\mu + \nu)v,$$

$$w' = \nu v - \gamma w,$$

wobei $\lambda, \gamma, \mu, \nu$ positive Konstanten bedeuten. Zeigen Sie, dass das AWP $u(0) = u_0 > 0, v(0) = v_0 > 0, w(0) = w_0 > 0$ für dieses System eindeutig lösbar ist, und dass die Lösungen für alle $t \geq 0$ existieren.
Beweis.
Wenn man die Lösungsformel für v,w und u benutzt, erhält man

$$v = v_0 e^{\int_0^t (\lambda u - \mu - \nu)\, ds},$$
$$w = e^{\int -\gamma\, dt} \left(\int \nu v e^{\int \gamma\, dt}\, dt + w_0 \right),$$
$$u = e^{\int -\lambda v\, dt} \left(\int \gamma w e^{\int \lambda v\, dt} + u_0 \right),$$

für $t \in [0, t_+]$
Das heißt $u, v, w > 0$, $\forall\, t \in [0, t_+]$ und daher $u + v + w > 0$ $\forall t \in [0, t_+]$. Ferner gilt, dass $u' + w' + v' = -\mu v < 0, \forall\, t \in [0, t_+]$. Folglich ist $u + v + w < u_0 + v_0 + w_0$.
Im Endeffekt haben wir die Beschränktheit der Lösungen und daher ist $t_+ = \infty$ nach Fortsetzungsprinzip.

2. *(8 Punkte)*

   (a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

   $$x' = A(t)x,$$

   mit

   $$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die Hauptfundamentalmatrix $Z(t)$ mit Anfangswert $Z(0) = I$.

   (b) Bestimmen Sie die Lösung für

   $$x' = A(t)x,$$

   $$x_0 = (2, 2)^T,$$

   mithilfe der Hauptfundamentalmatrix.

Lösung:

(a) Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ daraus folgt $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_1 + x_2 \\ t \cdot x_2 \end{pmatrix}$
Jetzt haben wir ein System von 2 Differentialgleichungen, die wir 2 mal lösen müssen: einmal für den Anfangswert $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(*)$ und noch einmal für den Anfangswert $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(**)$.

$(*)$
$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_1 + x_2 \\ t \cdot x_2 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Die 2. Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung, daher erhlaten wir, dass

$$x_2(t) = x_2(0) \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) = 1 \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) = \exp(\frac{t^2}{2})$$

und folglich

$$x_1(t) = x_1(0) \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) = 1 \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) = \exp(\frac{t^2}{2}).$$

$(**)$
$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_1 + x_2 \\ t \cdot x_2 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Die 2. Gleichung lösen wir analog wie bei $(*)$ und erhlaten, dass

$$x_2(t) = x_2(0) \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) = 1 \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) = \exp(\frac{t^2}{2})$$

und folglich

$$x_1(t) = x_1(0) \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) + x_2(0) \cdot t \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) = 0 \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) + 1 \cdot t \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) = t \cdot \exp(\frac{t^2}{2}).$$

Wenn wir $(*)$ und $(**)$ kombinieren erhalten wir das gewünschte Ergebniss
$Z(t) = \begin{pmatrix} \exp(\frac{t^2}{2}) & t \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) \\ 0 & \exp(\frac{t^2}{2}) \end{pmatrix}$ mit $Z(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Den 2. Teil der Aufgabe können wir jetzt ganz einfach lösen, indem wir $x(t) = Z(t) \cdot x_0^T$ ausrechnen:

$$x(t) = Z(t) \cdot x_0^T = \begin{pmatrix} \exp(\frac{t^2}{2}) & t \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) \\ 0 & \exp(\frac{t^2}{2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) + 2 \cdot t \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) \\ 2 \cdot \exp(\frac{t^2}{2}) \end{pmatrix}.$$

3. *(6 Punkte)*
Es sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert durch $A(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sowie die (nicht-autonome) lineare Differentialgleichung

$$u'(t) = A(t) \cdot u(t) \tag{1}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Fundamentallösung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ von (1) zum Anfangszeitpunkt $t_0 := 0$, d.h. die Lösung von

$$F'(t) = A(t) \cdot F(t), \quad F(0) = 1.$$

Lösung

Mit $u(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ lässt sich (1) schreiben als

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + ty(t) \\ y'(t) = 2y(t) \end{cases}$$

Wir betrachten zunächst das Anfangswertproblem für $x(t), y(t)$ mit $x(0) = 1, y(0) = 0$. Die Lösung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachte nun das Anfangswertproblem für $x(t), y(t)$ mit $x(0) = 0, y(0) = 1$. Die Lösung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(t-1) + e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Schließlich erhalten wir

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t}(t-1) + e^t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$