Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Lösung Ü4

1. *(7 Punkte)*
(Die Fredholmsche Integralgleichung) Sei K eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^n$ und $X := C(K)$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : K \to \mathbb{R}$, der mittels Norm

$$\|f\|_\infty := \max_{t\in K} |f(t)|$$

bekanntlich zu einem Banach-Raum wird.

Seien $u \in C([a,b])$ und $k \in C([a,b] \times [a,b])$ gegebene stetige Funktionen und

$$M := \max_{t,s\in[a,b]} |k(t,s)|.$$

Zeigen Sie, dass die sog. *Fredholmsche Integralgleichung*

$$x(t) = \mu \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds + u(t), \quad t \in [a,b]$$

dann für jeden Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$|\mu| < \frac{1}{M(b-a)}$$

genau eine Lösung $x \in C([a,b])$ besitzt.

[Tipp: Banachscher Fixpunktsatz mit $F(x) := u + \mu \int_a^b k(\cdot,s)x(s)\,ds$, $x \in C[a,b]$.]
Beweis.
Sei $X := C([a,b])$ und $F : X \to X$ definiert durch

$$F(x) := u(\cdot) + \mu \int_a^b k(\cdot,s)x(s)\,ds.$$

Wir zeigen zunächst $F(x) \in X$ für alle $x \in X$. Sei $x \in X$ beliebig. Wir zeigen die Stetigkeit von $F(x)$ in einem Punkt $t \in [a,b]$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da k auf der kompakten Menge $[a,b] \times [a,b]$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta_1 > 0$ mit der Eigenschaft

$$|t - \widetilde{t}| < \delta_1, \quad \forall\, t, \widetilde{t} \in [a,b]$$
$$\Rightarrow\ |k(t,\cdot) - k(\widetilde{t},\cdot)| < \frac{M\varepsilon}{2||x||_\infty}.$$

Ebenso existiert ein $\delta_2 > 0$ mit der Eigenschaft

$$|t - \widetilde{t}| < \delta_2, \quad \forall\, t, \widetilde{t} \in [a,b]$$

$$\Rightarrow\ |u(t) - u(\widetilde{t})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei wir $x \not\equiv 0$ annehmen dürfen (folglich $||x||_\infty > 0$), da für $x \equiv 0$ sowieso $F(0) = u$ nach Voraussetzung stetig ist. Dann folgt für alle $\widetilde{t} \in [a, b]$ mit $|t - \widetilde{t}| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ sofort

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(x)(\widetilde{t})| &\leq |u(t) - u(\widetilde{t})| + |\mu| \int_a^b |k(t,s) - k(\widetilde{t}, s)| \cdot |x(s)|\, ds \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{M(b-a)} \cdot \frac{M\varepsilon}{2||x||_\infty} \cdot \int_a^b ||x||_\infty\, ds \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dann ist $F(x)$ stetig in t. Dies zeigt $F(x) \in X$ für alle $x \in X$. Wir zeigen dann, dass $F : X \to X$ kontrahierend ist. Seien $x, y \in X$. Für alle $t \in [a, b]$ folgt dann

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq |\mu| \int_a^b |k(t,s)| \cdot |x(s) - y(s)|\, ds \\
&\leq |\mu| \int_a^b M \cdot ||x - y||_\infty\, ds \\
&= |\mu| \cdot M \cdot ||x - y||_\infty \cdot (b - a),
\end{aligned}$$

d.h.,

$$||F(x)(t) - F(y)(t)||_\infty \leq |\mu| \cdot M \cdot ||x - y||_\infty \cdot (b - a) \leq L||x - y||_\infty$$

mit

$$L := |\mu| \cdot M \cdot (b - a).$$

Nach Voraussetzung an μ ist $L < 1$. Deswegen ist F kontrahierend. Nach Banach′schem Fixpunktsatz existiert genau ein $x \in X$ mit $F(x) = x$, also genau ein $x \in X$ mit $x(t) = \mu \int_a^b k(t,s)x(s)\, ds + u(t)$ für alle $t \in [a, b]$.

2. *(4 Punkte)*
   Sei $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ stetig und gelte

   $$f(t, x) < 0 \ \text{für}\, tx > 0, \quad f(t, x) > 0 \ \text{für}\, tx < 0.$$

   Zeigen Sie, dass $x(t) \equiv 0$ die einzige Lösung der Gleichung $x' = f(t, x)$ mit Anfangswert $x(0) = 0$ ist.
   Beweis.
   Eine Lösung der Gleichung $x' = f(t, x)$ lässt sich durch

   $$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x)\, ds$$

   darstellen. Mit Anfangswert $x(0) = 0$ gilt dann

   $$x(t) = \int_0^t f(s, x)\, ds.$$

   (a) Falls $t > 0$ und $x > 0$, gilt

   $$0 < x = \int_0^t f(s, x)\, ds < 0.$$

(b) Falls $t > 0$ und $x < 0$, gilt

$$0 > x = \int_0^t f(s,x)\,ds > 0.$$

Daraus folgt $x \equiv 0$ für $t > 0$. Analog für $t < 0$.

3. *(4 Punkte)*
Beweisen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach und dem Fortsetzungsprinzip, dass das Anfangswertproblem

$$x' = (t^2 - x^2)^{3/2}, \quad x(0) = 0$$

genau eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt.
Beweis.
Wir definieren eine Funktional T :

$$Tx = \int_0^t (s^2 - x(s)^2)^{\frac{3}{2}}\,ds.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
|Tx - Ty| &= \left| \int_0^t \left((s^2 - x(s)^2)^{\frac{3}{2}} - (s^2 - y(s)^2)^{\frac{3}{2}} \right) ds \right| \\
&\leq \int_0^t \left| (s^2 - x(s)^2)^{\frac{3}{2}} - (s^2 - y(s)^2)^{\frac{3}{2}} \right| ds \\
&\leq \int_0^t \max_x \left| 3(s^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} x \right| \|x - y\|_\infty\,ds \\
&\leq \int_0^t 3\frac{s^2 - x^2 + x^2}{2} \|x - y\|_\infty\,ds \\
&\leq \int_0^t \frac{3}{2} s^2 \|x - y\|_\infty\,ds \\
&= \frac{1}{2} t^3 \|x - y\|_\infty,
\end{aligned}$$

d.h., für $0 < t < \sqrt[3]{2}$ ist die Funktional eine Kontraktion. Nach dem Satz von Banach-Fixpunkt existiert genau eine Lösung auf $t \in [0, \sqrt[3]{2})$. Weiter gilt die Abschätzung

$$x' = (t^2 - x^2)^{3/2} =: f(t,x) < t^3,$$

d.h., $f(t,x)$ ist linear beschränkt. Nach dem Fortsetzungsprinzip können wir von einem beliebigen Zeitpunkt zwischen $[0, \sqrt[3]{2})$ die Lösung immer weiter bis ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

4. *(5 Punkte)*
Sei $J = [0, +\infty]$ und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$F(x) - F(y) \leq L(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

wobei $L \in \mathbb{R}_+$. Sei y eine Lösung von

$$y' = t^2 + F(y), \quad \forall\, t \geq 0$$

und x erfülle

$$x' \leq t^2 + F(x), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Weiter sei $x(0) = y(0)$. Beweisen Sie, dass

$$x(t) \leq y(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Hinweis: Gronwallsche Ungleichung.
Beweis.
Wir zeigen die Behauptung durch einen Widerspruchsbeweis.
Nehme an, dass es ein $t_1 > 0$ existiert, sodass $x(t_1) > y(t_1)$.
Sei $t_0 := max\{t \in [0, t_1] | x(t) \leq y(t)\}$, dann gilt $x(t_0) = y(t_0)$
Setzte $v = x - y$ und erhalte, dass $v(t) \geq 0\ \forall t \in [t_0, t_1]$ und $v(t_0) = 0$.

Wenn wir v nach t ableiten bekommen wir, dass
$v' = x' - y' = x' - t^2 - F(y) \leq t^2 + F(x) - t^2 - F(y) = F(x) - F(y) \leq L(x - y) = Lv$.

Wende die Gronwall'sche Gleichung auf v an und erhalte:
$v(t) \leq v(t_0) e^{L \int_0^t 1 ds} = v(t_0) e^{Lv} = 0$. Folglich ist $v(t) \equiv 0$, bzw. $x \equiv y\ \forall\, t \in [t_0, t_1]$.
Das widerspricht aber der Wahl von t_1. Daher gilt die Behauptung.