Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Übung 3

1. *(5 Punkte)*
Es sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m,\ (t, y) \mapsto f(t, y)$ eine stetige und bezüglich y stetig differenzierbare Abbildung derart, dass $(t, y) \mapsto \dfrac{\partial f(t, y)}{\partial y}$ stetig ist. Zeigen Sie: Die Funktion f ist lokal Lipschitz-stetig auf D bzgl. y, d.h. in jedem Punkt $(t_0, y_0) \in D$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq D$ von (t_0, y_0) und eine Konstante $L = L(t_0, y_0) > 0$ mit

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \quad \text{für alle } (t, y_1), (t, y_2) \in U.$$

Beweis.
Sei $(t_0, y_0) \in D$ beliebig. Da D offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $U := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B_\varepsilon(y_0) \subset D$ ($B_\varepsilon(y_0) := \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - y_0|| < \varepsilon\}$). Da $(t, y) \mapsto \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}$ stetig und $\overline{U}$ kompakt ist, gilt

$$L := \sup_{(t,y) \in \overline{U}} \left\| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right\| < +\infty.$$

Nach dem Schrankensatz gilt

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \sup_{(s,y) \in \overline{U}} \left\| \frac{\partial f(s, y)}{\partial y} \right\| \cdot ||y_1 - y_2|| = L\|y_1 - y_2\|$$

für alle $(t, y_1), (t, y_2) \in U$.

Remark:
(**Schrankensatz**) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Es gebe ein $L < \infty$ mit $|Df(x)| \leq L$ für alle $x \in \Omega$. Dann folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \text{für alle } x, y \in \Omega.$$

2. *(4 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ stetig und gelte

$$f(t, x) < 0 \ \text{ für } tx > 0, \quad f(t, x) > 0 \ \text{ für } tx < 0.$$

Zeigen Sie, dass $x(t) \equiv 0$ die einzige Lösung der Gleichung $x' = f(t, x)$ mit Anfangswert $x(0) = 0$ ist.

Beweis.
Eine Lösung der Gleichung $x' = f(t, x)$ lässt sich durch

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x)\, ds$$

darstellen. Mit Anfangswert $x(0) = 0$ gilt dann

$$x(t) = \int_{0}^{t} f(s, x)\, ds.$$

(a) Falls $t > 0$ und $x > 0$, gilt

$$0 < x = \int_0^t f(s,x)\,ds < 0.$$

(b) Falls $t > 0$ und $x < 0$, gilt

$$0 > x = \int_0^t f(s,x)\,ds > 0.$$

Daraus folgt $x \equiv 0$ für $t > 0$. Analog für $t < 0$.

3. *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $(\cos(x+y^2)+3y)\,dx + (2y\cos(x+y^2)+3x)\,dy = 0$;

(b) $(xy^2-y^3)\,dx + (1-xy^2)\,dy = 0$.

Lösung

(a) Da

$$\frac{\partial(\cos(x+y^2)+3y)}{\partial y} = -2y\sin(x+y^2)+3 = \frac{\partial(2y\cos(x+y^2)+3x)}{\partial x},$$

ist die Gleichung exakt. Dann gelten

$$z(x,y) = \int (2y\cos(x+y^2)+3x)\,dy = \sin(x+y^2)+3xy+f(x),$$

und

$$z(x,y) = \int (\cos(x+y^2)+3y)\,dx = \sin(x+y^2)+3xy+g(y).$$

Daraus folgt $f(x) = g(y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Also ist $z(x,y) = 0$ die Lösung.

(b) Da

$$\frac{\partial(xy^2-y^3)}{\partial y} = 2xy-3y^2 \neq -y^2 = \frac{\partial(1-xy^2)}{\partial x},$$

ist die Gleichung nicht exakt. Dann suchen wir einen integrierenden Faktor $\mu(x,y)$, sodass

$$(1+xy^2)\frac{\partial\mu}{\partial x} - (xy^2-y^3)\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu(2xy-2y^2)$$

Ansatz: $\frac{\partial\mu}{\partial x} = 0$ (da $\frac{2xy-2y^2}{-(xy^2-y^3)} = -\frac{2}{y}$). Dann ist der integrierende Faktor

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y}\,dy} = \frac{1}{y^2}.$$

Dann erhalten wir

$$(x-y)\,dx + (\frac{1}{y^2}-x)\,dy = 0.$$

Dann gelten

$$z(x,y) = \int (\frac{1}{y^2}-x)\,dy = -xy-\frac{1}{y}+f(x),$$

und

$$z(x,y) = \int (x-y)\,dx = \frac{1}{2}x^2-xy+g(y).$$

Die Lösung ist $z(x,y) = \frac{1}{2}x^2-xy-\frac{1}{y} = C$, $C \in \mathbb{R}$.

4. *(6 Punkte)*

   (a) Bestimmen Sie für die Clairaut-DGL

   $$y = xy' + (y')^2$$

   alle Lösungen in expliziter Form.

   (b) Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung

   $$y = x(y')^2 + \ln(y')^2$$

   in Parameterform.

Lösung

(a) Sei $p = \frac{dy}{dx}$. Dann erhalten wir $y(p) = x(p)p + p^2$. Leiten wir weiter nach p ab:

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dx}{dp}p + x + 2p.$$

Mit $\frac{dy}{dp} = \frac{dx}{dp}p$ erhalten wir $x(p) = -2p$ und $y(p) = x(p)p + p^2 = -p^2$, also $y = -\frac{1}{4}x^2$. Alle Geraden $y = cx + c^2$ sind auch die Lösungen.

(b) Sei $p = \frac{dy}{dx}$. Dann erhalten wir $y(p) = x(p)p^2 + \ln p^2$. Leiten wir weiter nach p ab:

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dx}{dp}p^2 + 2xp + \frac{2}{p}.$$

Mit $\frac{dy}{dp} = \frac{dx}{dp}p$ erhalten wir für $p \neq 1$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2p}{p - p^2}x + \frac{2}{p(p - p^2)} = \frac{2}{1-p}x + \frac{2}{p(p-p^2)}.$$

Die Methode der Variation der Konstanten liefert für $p \neq 1$

$$\begin{aligned} x(p) &= e^{\int \frac{2}{1-p}\,dp}\left(\int \frac{2}{p(p-p^2)} e^{-\int \frac{2}{1-p}\,dp}\,dp + C\right) \\ &= \frac{1}{(1-p)^2}\left(\int \frac{2}{p(p-p^2)}(1-p)^2\,dp + C\right) \\ &= \frac{1}{(1-p)^2}\left(\int \frac{2}{p^2}(1-p)\,dp + C\right) \\ &= \frac{1}{(1-p)^2}\left(-\frac{2}{p} - \ln p^2 + C\right), \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und $y(p) = x(p)p^2 + \ln p^2$. Aber für $p = 1$ ist $y = x$ auch die Lösung.

5. *(4 Punkte)*
Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)e^{-x^2}\,dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie $u(t)$, indem Sie eine Differentialgleichung für $u(t)$ aufstellen, und das zugehörige Anfangswertproblem mit

$$u(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

lösen.

Lösung

1 Punkt :- Denn die Integrand gleichmäßig konvergenz (Uniform Convergent) ist, dürften wir die Abteilung von

1 Punkt :- Wenn die Studeten die gleichmäßigen Konvergenz gezeigt haben.

2 Punkte :- Wir berechnen $u'(t)$

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) e^{-x^2}\, dx\right)' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (-x) \sin(tx) e^{-x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx)\, d(e^{-x^2}) \\
&= \frac{1}{2} \left[\sin(tx) e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, d\sin(tx)\right] \\
&= -\frac{1}{2} t \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) e^{-x^2}\, dx \\
&= -\frac{1}{2} tu
\end{aligned}$$

Mit der Trennung der Variablen und Anfangswert erhalten wir

$$u(t) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{t^2}{4}}.$$