Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Lösung 2

1. *(6 Punkte)*
   Für die folgenden Differentialgleichungen bestimmen Sie alle Lösungen.

   (a) $y' = \dfrac{y+1}{x+2} + e^{\frac{y+1}{x+2}}$;

   (b) $y' = \dfrac{x+2y+1}{2x+y+2}$;

   (c) $y = xy' - \sqrt{x^2+y^2}$.

   Lösung

   (a) Setze $\overline{y} = y+1$ und $\overline{x} = x+2$. Dann für $\overline{y}$ gilt

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{d(y+1)}{d(x+2)} = \frac{dy}{dx} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} + e^{\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}.$$

   Setze weiter $u = \dfrac{\overline{y}}{\overline{x}}$. Dann gilt mit Produktregel

$$\frac{du}{d\overline{x}} = \frac{d}{d\overline{x}}\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right) = \frac{\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}\overline{x} - \overline{y}}{\overline{x}^2} = \left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}} + e^{\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}\right) \cdot \frac{1}{\overline{x}} - \frac{\overline{y}}{\overline{x}^2}.$$

   Daraus folgt $\overline{x}\dfrac{du}{d\overline{x}} = e^u$. Der Ansatz über die Trennung der Variablen liefert

$$-e^{-u} = \ln(C \cdot |\overline{x}|) \quad \Longrightarrow \quad u = -\ln\left(\ln \frac{1}{C \cdot |\overline{x}|}\right), \quad C > 0 \quad \text{und} \quad C \cdot |\overline{x}| < 1.$$

   Schließlich (alles einsetzen und nach y auflösen) erhalten wir

$$y = -1 - (x+2)\ln\left(\ln \frac{1}{C \cdot |x+2|}\right), \quad C > 0 \quad \text{und} \quad C \cdot |x+2| < 1.$$

   (b) Löse ein LGS

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0, \\ 2x + y + 2 = 0. \end{cases}$$

   Als Lösung erhalten wir $x = -1$ und $y = 0$. Setze dann $\overline{y} = y$ und $\overline{x} = x + 1$. Dann gilt

$$\overline{y}' = y' = \frac{\overline{x} + 2\overline{y}}{2\overline{x} + \overline{y}} = \frac{1 + 2\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}{2 + \frac{\overline{y}}{\overline{x}}}.$$

   Setze weiter $u = \dfrac{\overline{y}}{\overline{x}}$. Dann gilt

$$\frac{du}{d\overline{x}} = \frac{d}{d\overline{x}}\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right) = \frac{\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}\overline{x} - \overline{y}}{\overline{x}^2} = \frac{\frac{1+2u}{2+u}\overline{x} - \overline{x}u}{\overline{x}^2}.$$

$$\Longrightarrow \qquad \overline{x}u' = \frac{1+2u}{2+u} - u = \frac{1-u^2}{2+u}.$$

Der Ansatz über die Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned}
\int \frac{2+u}{1-u^2}\,du &= \int \frac{1}{\overline{x}}\,d\overline{x} \\
\int \left(\frac{1/2}{1+u} + \frac{3/2}{1-u}\right)du &= \ln|\overline{x}| + C \\
\frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{3}{2}\ln|1-u| &= \ln|\overline{x}| + C
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{y}{1+x}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1-\frac{y}{1+x}\right| &= \ln|x+1| + C \\
\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+y+1}{1+x}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-y+1}{1+x}\right| &= \ln|x+1| + C \\
\frac{1}{2}\ln|x+y+1| - \frac{3}{2}\ln|x+1-y| &= C
\end{aligned}$$

(c) Setze $u = \frac{y}{x}$. Dann gilt

$$u' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{(u+\sqrt{1+u^2})x - ux}{x^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad xu' = \sqrt{1+u^2}.$$

Der Ansatz über die Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du &= \int \frac{1}{x}\,dx \\
\ln(u+\sqrt{1+u^2}) &= \ln|x| + C \\
u + \sqrt{1+u^2} &= C|x|
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = C|x|, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Integriere $\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du$:

Sei $u = \tan\alpha$. Dann gilt $\frac{du}{d\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ und

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du &= \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}\,d\alpha \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}\,d\alpha \\
&= \int \frac{1}{\cos\alpha}\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2}\cdot(\ln|1+\sin\alpha| - \ln|1-\sin\alpha|) + C.
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit $\sin\alpha = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du = \ln(u+\sqrt{1+u^2}) + C.$$

2. *(4 Punkte)*
   Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme.

   (a) $x' + 3t^2 x = 6t^5, x(0) = 5,$

   (b) $ty' + 2y = 4t^2, y(1) = 2.$

   Lösung

   (a) Die Methode der Variation der Konstanten liefert

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int 3t^2\,dt}\Big(\int 6t^5 e^{\int 3t^2\,dt}\,dt + C\Big) \\ &= e^{-t^3}\Big(\int 6t^5 e^{t^3}\,dt + C\Big) \\ &= e^{-t^3}\Big(\int 2t^3 e^{t^3}\,dt^3 + C\Big) \\ &= e^{-t^3}\Big(2t^3 e^{t^3} - \int e^{t^3} 6t^2\,dt + C\Big) \\ &= 2t^3 - 2 + Ce^{-t^3}. \end{aligned}$$

   Mit Anfangswert $x(0) = 5$ erhalten wir $C = 7$.

   (b) Die Methode der Variation der Konstanten liefert

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\int \frac{2}{t}\,dt}\Big(\int 4te^{\int \frac{2}{t}\,dt}\,dt + C\Big) \\ &= \frac{1}{t^2}\Big(\int 4t\cdot t^2\,dt + C\Big) \\ &= t^2 + \frac{C}{t^2}. \end{aligned}$$

   Mit Anfangswert $y(1) = 2$ erhalten wir $C = 1$.
   Bemerkung: Die Gleichung hat einen integrienden Faktor t:

$$\begin{aligned} t^2y' + 2ty &= 4t^3 \\ (t^2y)' &= 4t^3 \\ t^2y &= t^4 + C \\ y &= t^2 + \frac{C}{t^2} \end{aligned}$$

3. *(4 Punkte)*
   Lösen Sie folgende Bernoulli-Differentialgleichungen.

   (a) $t^2y' + 2ty - y^3 = 0, t > 0;$

(b) $y' = \alpha y - \beta y^2, \alpha, \beta > 0.$

Lösung

(a) Multipliziere die Gleichung mit $-2y^{-3}$. Wir erhalten

$$(y^{-2})' - \frac{4}{t}y^{-2} + \frac{2}{t^2} = 0.$$

Die Methode der Variation der Konstanten liefert

$$\begin{aligned} y^{-2} &= e^{\int \frac{4}{t}\,dt}\Big(\int -\frac{2}{t^2}e^{-\int \frac{4}{t}\,dt}\,dt + C\Big) \\ &= t^4\Big(\int -\frac{2}{t^2}\frac{1}{t^4}\,dt + C\Big) \\ &= t^4\Big(\frac{2}{5t^5} + C\Big) \\ &= \frac{2}{5t} + Ct^4. \end{aligned}$$

Somit

$$y(t) = \pm\frac{\sqrt{5t}}{\sqrt{2+Ct^5}}, \quad t > 0,\, C > -\frac{2}{t^5}.$$

(b) Multipliziere die Gleichung mit $-y^{-2}$. Wir erhalten

$$(y^{-1})' = -\alpha y^{-1} + \beta.$$

Die Methode der Variation der Konstanten liefert

$$\begin{aligned} y^{-1} &= e^{-\int \alpha\,dt}\Big(\int \beta e^{\int \alpha\,dt}\,dt + C\Big) \\ &= e^{-\alpha t}\Big(\int \beta e^{\alpha t}\,dt + C\Big) \\ &= Ce^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Somit

$$y(t) = \frac{1}{Ce^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}}, \quad \alpha, \beta > 0,\, C \in \mathbb{R}.$$

4. *(3 Punkte)*
Die Riccati-Gleichung $x' + a(t)x + b(t)x^2 = \phi(t)$ mit $a; b; \phi$ stetig kann unter Kenntnis einer speziellen Lösung $x_*(t)$ mit dem Ansatz $x(t) = y(t) + x_*(t)$ auf eine Bernoulli-Gleichung für $y(t)$ zurückgeführt werden. Lösen Sie auf diese Weise das Anfangswertproblem

$$x' - (1-2t)x + x^2 = 2t, \quad x(0) = 2.$$

Hinweis: $x(t) \equiv 1$ ist eine Lösung.
Lösung
Setze $y(t) = x(t) - 1$ (da $x(t) \equiv 1$ eine Lösung ist.). Dann gilt für $y(t)$ die Bernoulli-Gleichung

$$y' = x' = (1-2t)x - x^2 + 2t = (-1-2t)y - y^2.$$

Multipliziere die Gleichung mit $-y^{-2}$. Wir erhalten

$$(y^{-1})' = (2t+1)y^{-1} + 1, \quad y(0) = 1.$$

Die Methode der Variation der Konstanten liefert

$$y^{-1} = e^{\int_0^t (2s+1)\,ds}\Big(\int_0^t e^{-\int_0^s (2\tau+1)\,d\tau}\,ds + 1\Big) \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

$$= e^{t^2+t}\int_0^t e^{-s-s^2}\,ds + e^{t^2+t}. \tag{3}$$

Somit

$$y(t) = \frac{1}{e^{t^2+t}\int_0^t e^{-s-s^2}\,ds + e^{t^2+t}},$$

und zwar

$$x(t) = \frac{1}{e^{t^2+t}\int_0^t e^{-s-s^2}\,ds + e^{t^2+t}} + 1.$$

5. Lösen Sie die folgende Differentialgleichung,

$$\mathrm{d}x - x\cot(y)\;\mathrm{d}y = 0.$$

Hinweis: Finden Sie den integrierenden Faktor.

Lösung: Nehmen wir

$$P(x,y)dx + G(x,y)dy = 0,$$

an. Hier ist $P(x,y) = 1$ und $G(x,y) = -x\cot y$. Weil $P_y = 0$ und $G_x = -\cot y$ ist, ist die Differentialgleichung nicht exakt.

Allerdings ist

$$\frac{Q_x - P_x}{P} = -\cot y,$$

eine Funktion von y und damit ist

$$\mu(y) = e^{\int -\cot y\ dy} = \frac{1}{\sin y},$$

ein Multiplikator/integrierender Faktor.

Also ist die DG $\frac{1}{\sin y}dx - x\frac{\cos y}{\sin^2 y}dy$ exakt. Mit $F_x = \frac{1}{\sin y}$ folgt die Stammfunktion $F(x,y) = \frac{x}{\sin y} + \varphi(y)$.

Wegen $F_y = \mu Q(x,y)$ gilt $-x\frac{\cos y}{\sin^2 y} + \varphi'(y) = -x\frac{\cos y}{\sin^2 y}$, bzw. $\varphi'(y) = 0$ und $\varphi(y) = 0$ (bzw. $\varphi(y) = \mu C$).

Insgesamt ist damit $F(x,y) = \frac{x}{\sin y} = C$ die Lösung der DG.