Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Lösung Ü12

Bitte melden Sie sich im ILIAS an, um die mündlichen Prüfung zu vereinbaren!
Siehe Website für mehr Informationnen.

1. *(10 Punkte)* Widerholen Sie den Beweis vom Satz von Peano genau für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' &= \sqrt{|x|}, \\ x(t_0) &= 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

Im Beweis bitten konstituieren Sie explizit die Lipschitz-stetige Approximationsfolge f_n, die gegen $\sqrt{|x|}$ gleichmäßig auf $[-\delta_0, \delta_0]$ konvergiert für beliebige $\delta_0 > 0$.

Lösung:
Sei $f(x) := \sqrt{|x|}$. Die Funktion ist nicht Lipschitz-, sondern gleichmäßig stetig. Um dem Beweis von Prüss Satz 6.1.1 zu folgen, brauchen wir folge Funktion $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sodass sie Lipschitz und gleichmäßig Konvergenz zu f ist. Oder wie der Beweis des Existenzsatzes in Prüss,

$$|f_n(x,t)| \leqslant M + 1,$$

wobei $M := \max\{|f(x,t)| :\ (t,x) \in J_{\delta_0} \times \bar{B}_r(0)\}$, für $\delta_0, r > 0$.

In dieser Lösung führen wir jedoch etwas ein, das als 'Mollifier' bezeichnet wird. Es handelt sich dabei um ein gebräuchliches Werkzeug von Calculus, das bei der 'Glättung' der Ecke der Funktion verwendet wird.

Definition: (Mollifier) Eine glatte nicht-positive Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\forall d \geqslant 1$ heißt 'Mollifier', wenn die die folgenden 3 Bedingungen erfüllt::

(a) φ hat kompakten Stützenbauformen (Compact support),
(b) $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$,
(c) $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) := \lim_{n\to\infty} n^{-d}\varphi(x/n) = \delta(x)$,

wobei δ Dirac-delta Funktion ist. Ein Beispiel für solche Mollifier: für alle $x \in \mathbb{R}$, definieren wir φ ,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\Big(-\frac{1}{1-|x|^2}\Big), & \text{if } |x| < 1, \\ 0, & \text{if } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$, wir definieren der Mollifieräls

$$f_n(x) = \big(\varphi_n * f\big)(x),$$

wobei φ_n Mollifier ist und $*$ als Konvolution bezeichnet. Ohne Beweis, wir haben die folgende Eigenschaft des Mollifier:

(a) $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gleichmäßig in jeder kompakten Menge,

(b) $f_n \in C^\infty$.

Außerdem,

$$|f_n(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x-y)f(y)|\mathrm{d}y \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \max_x |f(x)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y)\mathrm{d}y}_{=1}$$

Deshalb folgt der Beweis von Satz 6.1.1 (p. 119).

2. *(10 Punkte)* Beweisen Sie den Forsetzungssatz für nichtfortsetzbare Lösung, .d.h,

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, x_0) \in G$. Sei x_m eine auf (t_-, t_+) definierte nichtforsetzbare Lösung von

$$\begin{cases} x' &= f(t,x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \tag{0.2}$$

dann der rechte Endpunkt t_+ ist durch die folgende Alternativen charakterisiert ist,

- $t_+ = \infty$, $x_m(t)$ ist eine globale Lösung nach rechts.
- $t_+ < \infty$ und $\liminf_{t\to t_+} \operatorname{dist}((t, x_m(t)), \partial G) = 0$.
- $t_+ < \infty$, $\liminf_{t\to t_+} \operatorname{dist}((t, x_m(t)), \partial G) > 0$, und $\lim_{t\to t_+} |x_m(t)| = \infty$.

Entsprechendes gilt für den linken Endpunkt t_-.

Lösung: Satz 6.2.1 (Prüss p.121). Beweis genauso wie Forsetzungsatz 3.17 im Skript geführt werden, wenn mann anstelle des Picard-Lindelöf Satz den Satz von Peano verwendet.