Lehrstuhl für Mathematik IV
Prof. boshi. Li Chen
Matthew Liew, Tian Chu Gan, Thilo Kraft

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

FSS 2020

Dynamische Systeme - Lösung Ü11

1. *(5 Punkte)*
Betrachten Sie die Ruhelagen $(x, x') = (0, 0)$, und $(x, x') = (\pi, 0)$ des Pendels

$$x'' + \omega^2 \sin x = 0.$$

Zeigen Sie, dass die erste stabil aber nicht asymptotisch stabil, und die zweite instabil ist.

Beweis.

(a) $(x, x') = (0, 0)$
Wir zeigen, dass diese Ruhelage stabil ist. Betrachte dazu die Ljapunov-Funktion $V(x, x') = \frac{1}{2}(x')^2 + \omega^2(1 - \cos(x))$ der Pendelgleichung $x'' + \omega^2 \sin(x) = 0$. Und gelten

$$\nabla V(x, x') = (\omega^2 \sin(x), x'),$$
$$\nabla V(0, 0) = (\omega^2 \sin(0), 0) = (0, 0).$$
$$\nabla^2 V(x, x') = \begin{pmatrix} \omega^2 \cos(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\nabla^2 V(0, 0) = \begin{pmatrix} \omega^2 \cos(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weil die Hesse-Matrix am Extremum $(0, 0)$ der Ljapunov-Funktion (für $\omega \neq 0$) positiv definit ist, haben wir ein striktes Minimum gefunden. Damit ist die Ruhelage $(0, 0)$ stabil. Da die Funktion V keine strikte Ljapunov-Funktion ist, können wir hier keine weitere Aussage über asymptotische Stabilität treffen.

(b) $(x, x') = (\pi, 0)$
Wir wollen das Prinzip der linearisierten Stabilität anwenden und transformieren deshalb die DGL höherer Ordnung in eine DGL erster Ordnung.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 \sin(u) \end{pmatrix} := f(u, v),$$

$$f'(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos(u) & 0 \end{pmatrix},$$

Und damit hat

$$A := f'(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm\omega$. Da einer der Eigenwerte (für $\omega \neq 0$) auf jeden Fall positiv ist, ist die Ruhelage nach Satz 5.4.1 instabil.

2. *(5 Punkte)*
Sei $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$. Das zu H gehörige Hamilton-System ist definiert durch

$$\begin{aligned} q' &= H_p(q,p), \\ p' &= -H_q(q,p). \end{aligned} \tag{0.1}$$

Zeigen Sie, wann ein Equilibrium von (1) stabil **und** unstabil ist?

Beweis.

Das Equilibrium ist stabil, falls die Hessematrix positiv definit ist, d.h. wenn gilt

$$\nabla^2 H(q,p) = \begin{pmatrix} H_{qq}(q,p) & H_{qp}(q,p) \\ H_{pq}(q,p) & H_{pp}(q,p) \end{pmatrix}$$

ist positiv definit. Wenn die Hessematrix negativ ist, wird das Equilibrium instabil. Wenn die Hessematrix indefinit ist, gibt es Sattelpunkt, und wird das System instabil.

3. *(5 Punkte)*
Beweisen Sie **Satz 5.5.4.**: Sei $V \in C(G; \mathbb{R})$ eine Ljapunov-Funktion für $x' = f(x)$ und x_* sei ein Equilibrium für $x' = f(x)$. Dann gilt:
1. Ist x_* ein striktes Minimum von V, so ist x_* stabil für $x' = f(x)$.
2. Ist x_* isoliert in $\mathcal{E} = f^{-1}(0)$, ein striktes Minimum von V und ist V eine strikte Ljapunov-Funktion, so ist x_* asymptotisch stabil für $x' = f(x)$.

Beweis.
Siehe Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme (Prüss, Wilke), Kapitel 5.5 Ljapunov-Funktionen, Satz 5.4.1, S.106.

4. *(5 Punkte)*
Zeigen Sie mit direkter Methode von Ljapunov, dass das Koexistenzequilibrium $(x_*, y_*) = \left(\frac{d}{e}, \frac{ae - bd}{ce}\right)$ vom Volterra-Lotka-System asymptotisch stabil ist.

$$\text{(VLS)} \quad \begin{cases} x' = ax - cxy - bx^2, \\ y' = -dy + exy, \end{cases} \qquad a, b, c, d, e > 0.$$

Tipp: $V(x,y) = e\left(x - x_* \log \dfrac{x}{x_*}\right) + c\left(y - y_* \log \dfrac{y}{y_*}\right)$.

Beweis.
Betrachte $V(x,y) = e\Big(x - x_* \ln\left(\frac{x}{x_*}\right)\Big)c\Big(y - y_* \ln\left(\frac{y}{y_*}\right)\Big)$. Wir zeigen, dass diese Funktion eine Ljapunov-Funktion für VLS ist. Dazu:

$$(\nabla V(x,y) | f(x,y)) = \left(\begin{pmatrix} e(1 - \frac{x}{x_*}) \\ c(1 - \frac{y}{y_*}) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} ax - cxy - bx^2 \\ -dy + exy \end{pmatrix} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= e(x - x_*)(a - cy - bx)) + c(y - y_*)(-d + ex) \\
&= e(x - x_*)(c(y - y_*) + b(x_* - x)) + c(y - y_*)e(x - x_*) \\
&= -eb(x - x_*)^2 \leq 0.
\end{aligned}
$$

Es gilt sogar ... < 0 für alle $x \neq x_*$, also haben wir eine strikte Ljapunov-Funktion. Außerdem gilt:

$$
\nabla V(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} e(1 - \frac{x_*}{x_*}) \\ c(1 - \frac{y_*}{y_*}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Damit ist (x_*, y_*) ein Extremum der Ljapunov-Funktion. Außerdem haben wir:

$$
\nabla^2 V(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} \frac{e}{x_*} & 0 \\ 0 & \frac{c}{y_*} \end{pmatrix}
$$

Diese Matrix ist positiv definit, da $c, e, x_*, y_* > 0$. Wir haben ein striktes Minimum einer strikten Ljapunov-Funktion gefunden. Damit ist nach Satz 5.5.4 (x_*, y_*) asymptotisch stabil für VLS.